



# Queste de savoir

Probabilité de toucher la fève en  
découpant une galette des rois

---

lundi 24 février 2025



# Table des matières

Introduction . . . . .	1
1. Formulation mathématique du problème . . . . .	1
2. Titre par défaut . . . . .	2
3. Application numérique . . . . .	5

## Introduction

En janvier, lors d'un goûter entre amis autour d'une galette des rois, quelqu'un m'a demandé quelle est la probabilité de toucher la fève lors de la découpe de la galette en parts égales.

J'ai fait une recherche rapide avec Google (et ChatGPT) et j'ai vu que la solution était donnée sous des hypothèses beaucoup trop restrictives, comme supposer connue la distance de la fève au centre de la galette.

Je donne ici une solution avec le minimum d'hypothèses permettant d'exprimer la probabilité sous une forme analytique.



Terminale scientifique ou, plutôt, classes préparatoires ou premier cycle universitaire.

## 1. Formulation mathématique du problème

Nous allons supposer que :

- la fève et la galette sont des disques de rayons  $R_F$  et  $R_G$ ,
- la galette est découpée en **n parts égales** selon des demi-droites d'origine le centre  $O$  de la galette,
- le centre  $F$  de la fève est placé selon une **loi de probabilité uniforme** dans le disque de centre  $O$  et de rayon  $R_G - R_F$  (sinon, une partie de la fève serait à l'extérieur de la galette).

Soit  $\lambda = \frac{R_G}{R_F}$ . Nous allons montrer que la probabilité cherchée est une fonction de  $\lambda$  et de  $n$ , soit  $P(\lambda, n)$ .

Il est à noter que les hypothèses précédentes (en gras) pourraient être relaxées. Néanmoins, elles ont l'avantage de permettre d'exprimer  $P(\lambda, n)$  comme une fonction analytique de  $\lambda$  et de  $n$ .

## 2. Titre par défaut

Il est clair que les hypothèses précédentes entraînent que  $P(\lambda, n) = 1$  si  $\lambda \leq 2$ . Dans ce qui suit, nous allons donc supposer  $n \geq 2$  (si  $n = 1$ , il n'y a pas de découpe!) et  $\lambda \geq 2$ .

Nous allons considérer deux cas selon que  $F$  est à une distance  $R$  de  $O$  inférieure à  $R_F$  (cas 1) ou supérieure à  $R_F$  (cas 2).

Sans perte de généralité, on peut supposer que les angles des demi-droites sont égaux à  $\frac{2k\pi}{n}$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ .

### 2.0.1. Cas 1:

Dans ce cas,  $O$  appartient à la fève et donc le couteau va nécessairement toucher la fève puisque la découpe débute en  $O$ . Soit  $p_1$  la probabilité que ce cas arrive. Comme la fève est placée uniformément dans le disque de centre  $O$  et de rayon  $R_G - R_F$ , on a :

$$p_1 = \frac{\pi R_F^2}{\pi (R_G - R_F)^2} = \frac{1}{(\lambda - 1)^2} \quad (1)$$

### 2.0.2. Cas 2:

La probabilité d'occurrence du cas 2 est :

$$p_2 = 1 - p_1 = \frac{\lambda(\lambda - 2)}{(\lambda - 1)^2} \quad (2)$$

Dans ce cas, soit  $\alpha$  l'angle sous lequel la fève est vue depuis  $O$ , on a :

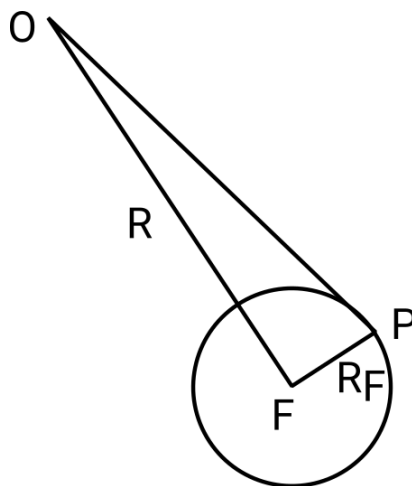


FIGURE 2.1. – Figure 1 : Angle  $\alpha$  sous lequel la fève est vue de  $O$ .

## 2. Titre par défaut

Le triangle OFP est rectangle en P, par conséquent on a :

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{R_F}{R} \Rightarrow \alpha = 2 \arcsin\left(\frac{R_F}{R}\right)$$

Soient  $(X, Y)$  et  $(\Theta, R)$  les coordonnées cartésiennes et polaires de F :

$$X = R \cos \Theta, Y = R \sin$$

Dans le cas 2,  $F$  est uniformément réparti dans la couronne de centre  $O$  et de rayons  $R_F$  et  $R_G - R_F$ . La densité de probabilité de  $(X, Y)$  est alors

$$p_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{\text{aire(couronne)}} = \frac{1}{\pi((R_G - R_F)^2 - R_F^2)} \quad (3)$$

Sachant qu'un élément d'aire  $dx dy$  est égal à  $r dr d\theta$ , la densité de probabilité  $p_{(\Theta,R)}$  de  $(\Theta, R)$  s'écrit alors :

$$p_{(\Theta,R)}(\theta, r) = \frac{r}{\pi((R_G - R_F)^2 - R_F^2)} \quad R_F \leq r \leq (R_G - R_F) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (4)$$

La densité de probabilité de  $p_R$  de  $R$  s'écrit alors :

$$p_R(r) = \int_0^{2\pi} p(\theta, r) d\theta = \frac{2r}{(R_G - R_F)^2 - R_F^2} \quad R_F \leq r \leq (R_G - R_F) \quad (5)$$

D'après la Figure (1), la probabilité qu'une demi-droite D d'angle  $\varphi$  touche la fève lorsque la fève est à une distance  $R = r$  de O est égale à la probabilité que  $\Theta$  appartienne, modulo  $2$ , au secteur angulaire  $[\varphi - \frac{\alpha(r)}{2}, \varphi + \frac{\alpha(r)}{2}]$ , soit  $\frac{\alpha(r)}{2\pi}$ .

Par conséquent, la fève sera touchée lors de la découpe si, et seulement si,  $\Theta$  appartient, modulo  $2$ , à l'un des secteurs angulaires  $\left\{ \left[ \frac{2k\pi}{n} - \frac{\alpha(r)}{2}, \frac{2k\pi}{n} + \frac{\alpha(r)}{2} \right], k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$ . Si  $R = r$ , la probabilité d'intersection avec la fève est égale à :

$$P_{\text{inter}}(r) = \min\left(1, \frac{n\alpha(r)}{2\pi}\right) = \min\left(1, \frac{n}{\pi} \arcsin\left(\frac{R_F}{r}\right)\right) \quad (6)$$

La probabilité est égale à 1 si  $r \leq \frac{R_F}{\sin(\frac{\pi}{n})}$ . Sachant que  $r \leq R_G - R_F$ , la probabilité d'intersection dans le cas 2 est donc égale à 1 si  $\lambda \leq 1 + 1/\sin(n)$ . On a donc :

$$P(\lambda, n) = 1 \quad \text{si} \quad \lambda \leq 1 + \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{n})} \quad (7)$$

En particulier, (7) implique que la fève sera touchée asymptotiquement avec une probabilité 1 lorsque le nombre de parts est de plus en plus grand.

La probabilité de toucher la fève lors de la découpe, s'obtient en randomisant R dans (5) :

## 2. Titre par défaut

$$P(\text{intersection} \mid \text{Cas 2}) = \int_{R_F}^{R_G - R_F} \min\left(1, \frac{n}{\pi} \arcsin\left(\frac{R_F}{r}\right)\right) p(r) dr \quad (8)$$

En reportant dans (5), on obtient :

$$P(\text{intersection} \mid \text{Cas 2}) = \frac{2}{(R_G - R_F)^2 - R_F^2} \int_{R_F}^{R_G - R_F} \min\left(1, \frac{n}{\pi} \arcsin\left(\frac{R_F}{r}\right)\right) r dr \quad (9)$$

Faisons le changement de variable  $x = \frac{R_F}{r}$ , on a alors :

$$\int_{R_F}^{R_G - R_F} \min\left(1, \frac{n}{\pi} \arcsin\left(\frac{R_F}{r}\right)\right) r dr = R_F^2 \int_{\frac{1}{(\lambda-1)}}^1 \frac{\min\left(1, \frac{n}{\pi} \arcsin(x)\right)}{x^3} dx \quad (10)$$

Par conséquent, on peut écrire :

$$P(\text{intersection} \mid \text{Cas 2}) = \frac{2n}{\pi\lambda(\lambda-2)} \left( \int_{\frac{1}{(\lambda-1)}}^{\sin(\cdot)} \frac{\arcsin(x)}{x^3} dx \right) + \frac{2}{\lambda(\lambda-2)} \int_{\sin(\cdot)}^1 \frac{dx}{x^3} \quad (11)$$

La première intégrale se calcule analytiquement :

$$\int \frac{\arcsin(x)}{x^3} dx = -\frac{1}{2} \frac{\arcsin(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C \quad (12)$$

Or, la probabilité cherchée s'écrit :

$$P(\lambda, n) = P(\text{Cas 1}) + P(\text{intersection} \mid \text{Cas 2}) P(\text{Cas 2}) \quad (13)$$

Tous calculs faits, on obtient :

$$P(\lambda, n) = \frac{n}{\pi} \left( \arcsin\left(\frac{1}{\lambda-1}\right) + \frac{\sqrt{\lambda(\lambda-2)} - \cotan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{(\lambda-1)^2} \right) \chi(\lambda) + (1 - \chi(\lambda)) \quad (14)$$

où  $\chi(\lambda)$  est égale à 1 si  $\lambda \geq 1 + (\pi/n)$  et 0 sinon.

### 3. Application numérique

## 3. Application numérique

Les graphes de  $P(, 4)$ ,  $P(, 6)$  et  $P(, 8)$  en fonction de  $\lambda$  sont montrés Figure 2.

Ainsi, si la galette a un rayon 10 fois plus grand que la fève :

$$P(10, 4) \approx 0,267 \quad P(10, 6) \approx 0,383 \quad P(10, 8) \approx 0,489$$

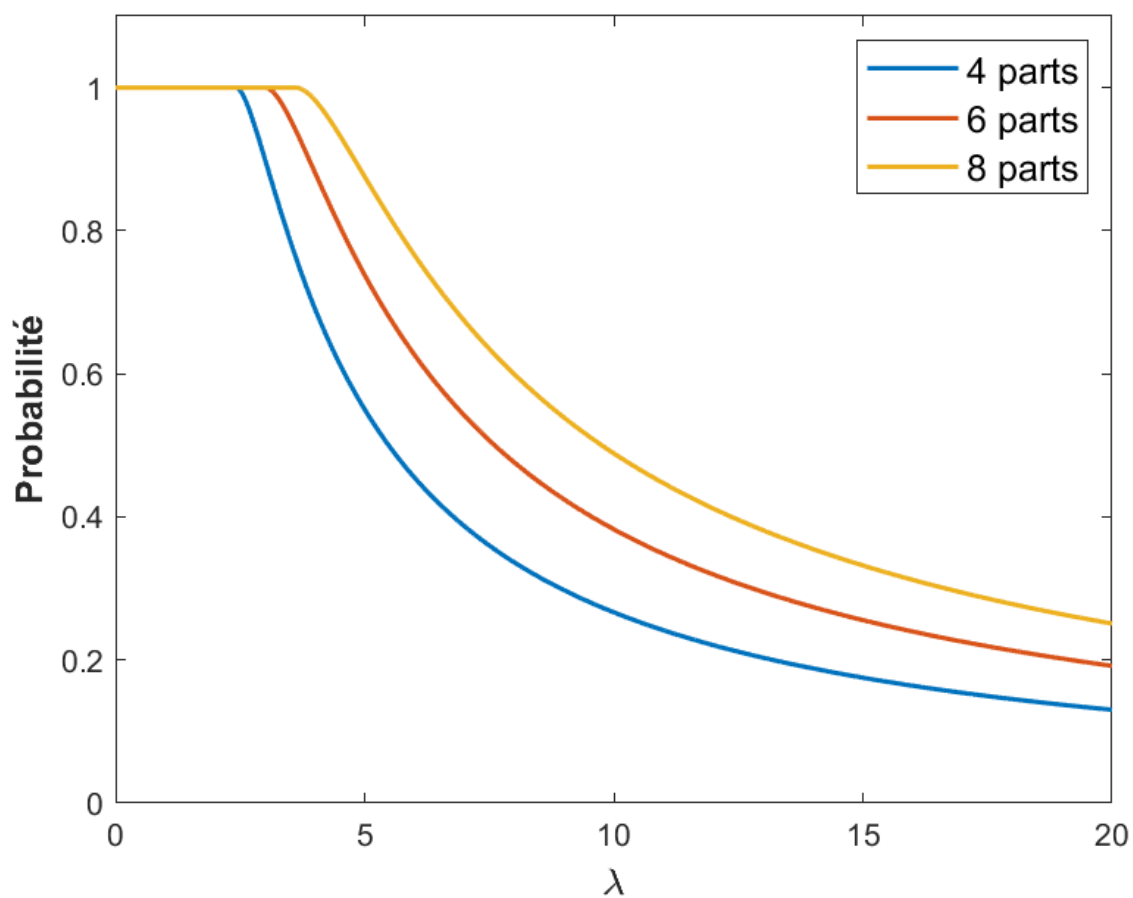


FIGURE 3.2. – Figure 2 : Probabilité de toucher la fève par une découpe de la galette en parts égales.