Kaji9

Théorème et histoire de Pythagore

12 août 2019

Table des matières

Que vous aimiez les mathématiques ou que vous les détestiez, que vous soyez jeune ou vieux, il existe une propriété mathématique à côté de laquelle vous n'avez pu passer : le célèbre **Théorème de Pythagore**. Cette propriété géométrique est, à n'en pas douter, la plus célèbre de toutes. Vous ne la connaissez pas encore ? Vous ne l'avez pas comprise ? Vous n'en voyez pas l'utilité ? Ou peut-être voudriez-vous savoir qui était Pythagore et ce qu'il a fait pour devenir aussi célèbre ? Quel que soit votre cas, je me charge de tout vous expliquer.

Nous commencerons par aborder le théorème de Pythagore dans ce qu'il a de plus mathématique. Je vous expliquerai cette règle de géométrie essentielle, nous en verrons des applications dans la vie courante mais aussi des applications aux figures géométriques essentielles comme le triangle équilatéral, le carré ou le cube. Ce sera également l'occasion d'aborder quelques démonstrations avant de finir par les implications que le théorème a pu avoir sur diverses branches des mathématiques.

Dans un second temps, nous aborderons le théorème de Pythagore sous un angle historique. Nous verrons où et quand cette propriété fut découverte ainsi que son lien avec le célèbre mathématicien grec qui lui a donné son nom. L'histoire tant du théorème que de Pythagore est certainement très loin de ce que vous imaginez. Enfin, nous étudierons les idées et découvertes de Pythagore et ses élèves.

Si vous êtes intéressés par l'un ou/et l'autre aspect du théorème, alors je vous invite à lire ce tutoriel qui se veut abordable même pour ceux qui n'ont que des notions rudimentaires de géométrie.

Première partie

Aspect mathématique

I. *Aspect mathématique*

Dans cette première partie nous allons parler Mathématiques et essayer de répondre à quelques questions : comment utiliser le théorème de Pythagore ? Quelle est son utilité, dans des situations courantes ou en Géométrie ? Est-on certain qu'il est vrai ? A-t-il eu un impact sur d'autres branches des Mathématiques que la Géométrie classique ? Si certains passages comme les démonstrations ou quelques exercices nécessitent quelques connaissances supplémentaires (en trigonométrie ou en algèbre notamment), l'essentiel de cette partie a été rédigée pour pouvoir être suivie par des lecteurs n'ayant que peu de connaissances mathématiques.

1. Pythagore, à quoi ça sert ?

Voilà une phrase que l'on entend souvent, notamment concernant les mathématiques : " *A quoi ça me servira dans la vraie vie ?* " Même s'il semble étrange de parler de "vraie" vie (comme si les Maths faisaient partie d'une "fausse" vie) il est tout de même légitime de se poser la question. Quel est l'intérêt de se rentrer dans le crâne des formules mathématiques complexes si elles ne doivent jamais servir ? Alors avant même de commencer à parler géométrie, triangle ou carré, commençons par considérer quelques cas de la "vraie" vie. Nous allons considérer un cas pratique très riche en la matière : la construction d'une maison. Posons-nous deux questions :

1. Comment le maçon ou le charpentier font-ils pour s'assurer que les murs ou les éléments de la charpente sont bien perpendiculaires ?
2. Comment fait l'architecte (ou le maître d'œuvre) pour connaître les dimensions de la toiture d'une maison qui n'existe que sur le papier ? Par exemple la maison ci-dessous :

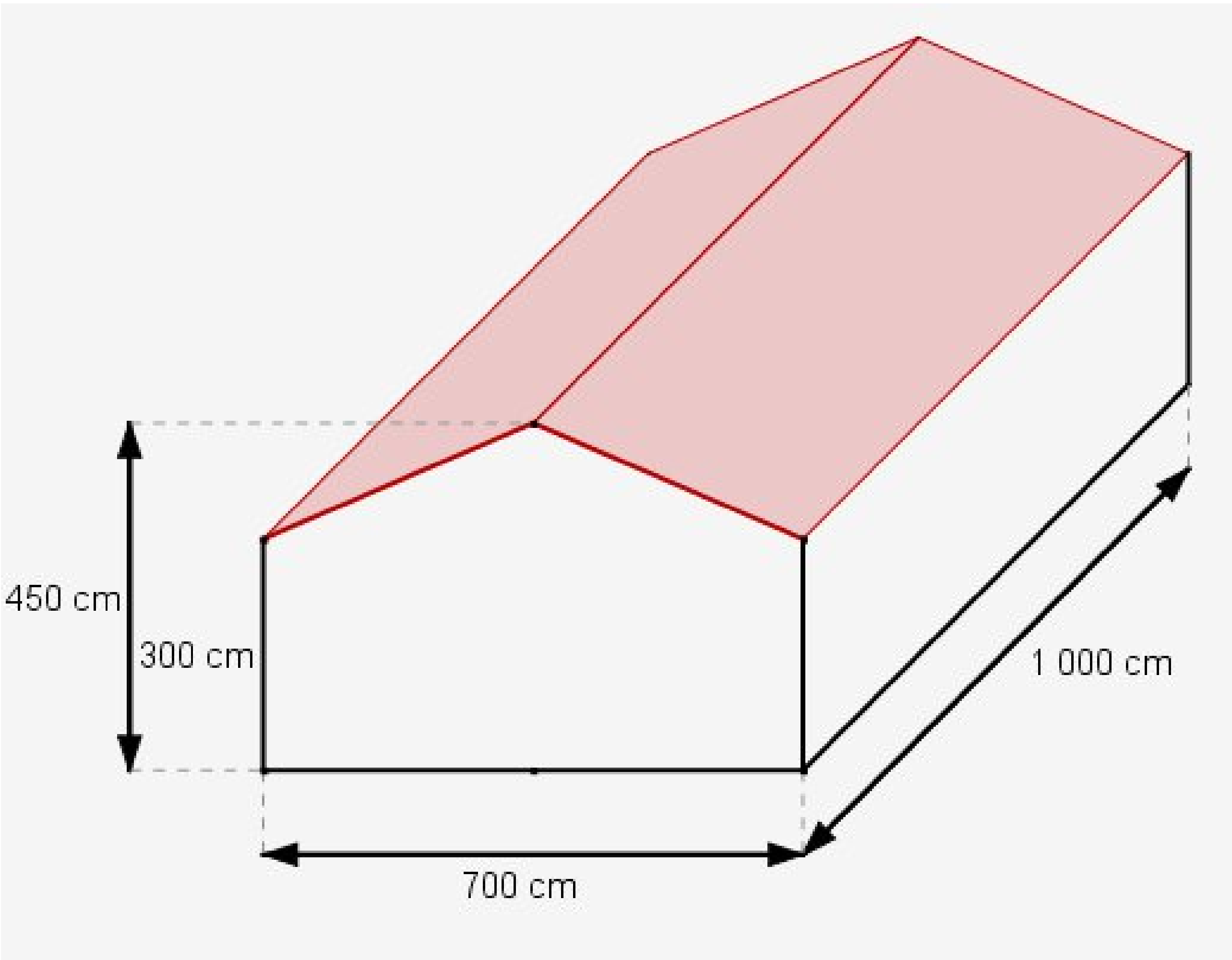


FIGURE 1.1. – Schéma d'une maison plain-pied

Eh bien, oui ! Avoir une maison de travers, ce n'est pas pratique. L'architecte ne peut se fier qu'à un dessin qui n'est qu'une réduction de la future maison : quelques millimètres d'erreur sur le plan peuvent représenter quelques dizaines de centimètres à l'arrivée. Le maçon et le charpentier n'utilisent évidemment plus leur équerre d'écolier. Et pourtant aucun ne commet d'erreur, avec ou sans outil moderne. Comment font-ils ? Vous voulez la réponse : ils connaissent le théorème de Pythagore et sa réciproque ! Alors, sans plus tarder découvrons-les ensemble.

1.1. Le problème de l'architecte

####Élaguons et annotons la figure

Nous pouvons déjà répondre partiellement au problème rencontré par l'architecte : la toiture a une longueur de 1 000 cm soit 10 m. Ce qui nous manque en définitive ce n'est que la largeur d'un pan de toiture (nous supposerons que les deux pans sont symétriques). Finalement, le problème du toit de notre maison en 3 dimensions, peut se ramener à un simple problème en 2 dimensions, un problème de géométrie plane. Nous allons donc simplifier cette figure en ne considérant que le pignon de la maison et nommer les sommets utiles :

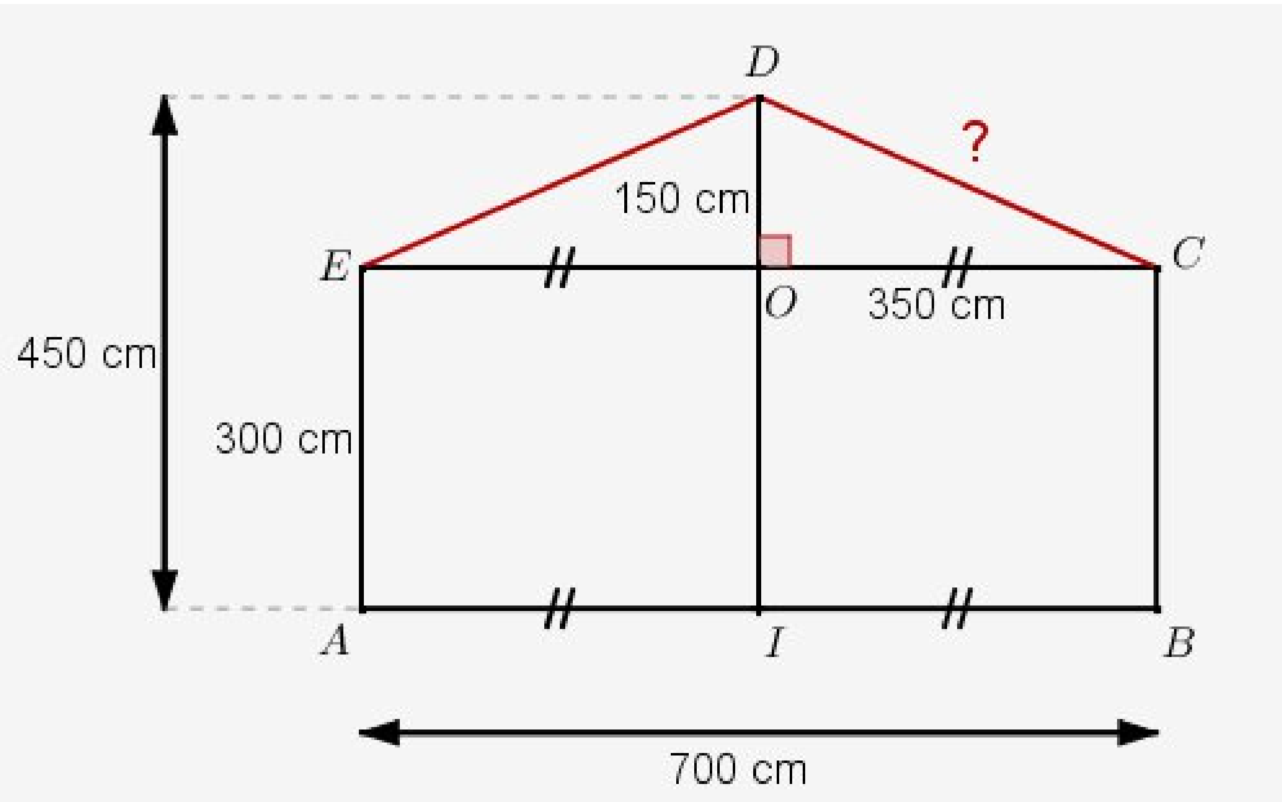


FIGURE 1.2. – Schéma simplifié de notre maison

Si notre ami l'architecte a bien travaillé, alors les points I et O de la figure ci-dessus sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CE] et donc $AI = IB = EO = OC = \frac{700}{2} = 350cm$. De plus, ABCE doit être un rectangle et les triangles DEO et DOC doivent eux être des triangles rectangles. Enfin, $DO = DI - OI = 450 - 300 = 150cm$. Le problème revient donc à calculer la longueur de l'hypoténuse du triangle rectangle DOC, connaissant ses cathètes.

####Vocabulaire et formulation du théorème

?

Pardon ? C'est quoi les Hyppothèques ?

Pardon, je vais un peu vite en besogne. Dans un triangle rectangle, on classe généralement les trois côtés en deux catégories bien distinctes : ceux qui sont accolés à l'angle droit (que l'on appelle **cathètes** ou plus généralement **côtés de l'angle droit**) et celui qui ne le touche pas (l'**hypoténuse**). Vous remarquerez sur la figure ci-dessous que chaque cathète prise séparément est nécessairement plus courte que l'hypoténuse. Certains appuient d'ailleurs sur ce fait en parlant des "petits côtés de l'angle droit", mais cette formulation est redondante.

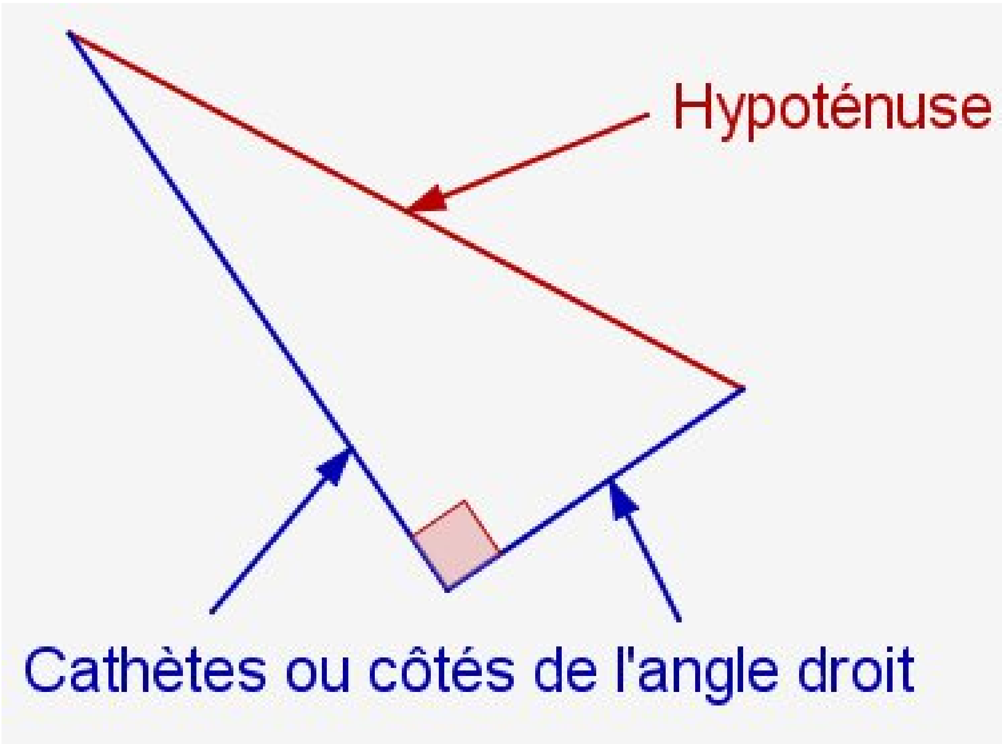


Figure 1.3. – Noms des côtés d'un triangle rectangle

Nous disions donc que pour aider notre ami architecte nous devions trouver la mesure de l'hypoténuse du triangle rectangle COD. Nous connaissons bien les longueurs des deux cathètes CO et DO, mais cela ne nous avance pas d'avantage sur celle de l'hypoténuse CD. Pour y parvenir nous allons avoir recours au théorème de Pythagore dont voici (enfin !) deux formulations :

!

Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des cathètes.

ou

> Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit.

Avant que vous ne quittiez cette page de dépit, je vais vous expliquer ce théorème plus en détail. Tout d'abord, répondons à la question que vous vous posez peut-être : " *C'est quoi ces carrés ? On n'est pas sensé être dans un triangle ?* ". Par le mot "carré", les mathématiciens entendent une opération : plus exactement il s'agit de l'opération qui consiste à multiplier un nombre par lui-même. Par exemple, le carré de 5 n'est rien d'autre que la multiplication $5 \times 5 = 25$, que l'on note $5^2 = 25$. Le petit 2 écrit en haut à droite du 5 se lit " *au carré* " ou " *élevé au carré* ", comme dans l'unité cm^2. Si vous apprenez en ce moment le théorème de Pythagore à l'école, je vous conseille vivement de connaître sur le bout des doigts la liste des carrés de 0 à 15. D'ailleurs en voici une liste qui nous aidera pour la suite :

$$0^2 = 0; \qquad 1^2 = 1; \qquad 2^2 = 4; \qquad 3^2 = 9; \qquad 4^2 = 16; \qquad 5^2 = 25$$
$$6^2 = 36; \qquad 7^2 = 49; \qquad 8^2 = 64; \qquad 9^2 = 81; \qquad 10^2 = 100; \qquad 11^2 = 121$$
$$12^2 = 144; \qquad 13^2 = 169; \qquad 14^2 = 196; \qquad 15^2 = 225; \qquad 16^2 = 256$$
$$17^2 = 289; \qquad 18^2 = 324; \qquad 19^2 = 361; \qquad 20^2 = 400$$

De la même façon que l'addition a comme opération "contraire" la soustraction ou que l'opération contraire de la multiplication est la division, le carré a une opération contraire appelée la racine carrée et qui se note à l'aide du symbole bizarroïde $\sqrt{}$ voire $\sqrt[2]{}$. Ainsi, chercher la racine carrée de 36, revient à se poser la question : " *Quel nombre donne 36 si je le multiplie par lui-même ?* ". Vous connaissez la réponse :$\sqrt{36} = 6$! Vous souhaitez vous exercer ? En voici quelques autres : calculer $\sqrt{16}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{81}$, $\sqrt{144}$ et $\sqrt{225}$. Vous pourrez vous aider de la liste de valeurs ci-dessus et lorsque vous aurez fini, vous pourrez cliquer ci-dessous pour connaître les réponses.

Contenu masqué n°1

####Retour sur les plans de l'architecte

Maintenant que vous disposez du vocabulaire, du théorème et des opérations nécessaires, il est temps de mettre tout cela en application. Le théorème de Pythagore nous dit que l'on peut calculer le carré de l'hypoténuse en additionnant les carrés des deux cathètes. Commençons donc par calculer ces fameux carrés : $DO^2 = 150^2 = 22\,500$ et $CO^2 = 350^2 = 122\,500$.

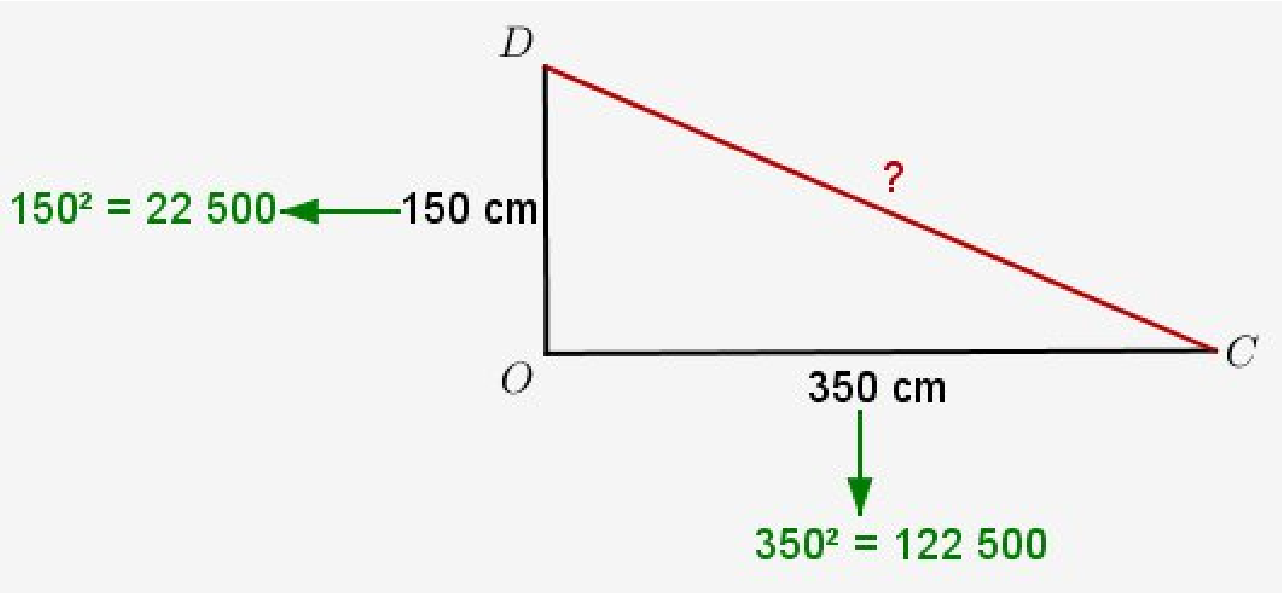


FIGURE 1.4. – Les carrés des cathètes

Additionnons maintenant les résultats obtenus :

$$DO^2 + CO^2 = 150^2 + 350^2 = 22\ 500 + 122\ 500 = 145\ 000$$

(1.-1)

145 000 cm ! Ça fait dans les 1 km 450 ! C'est pas un peu long pour une toiture ?

Attention ! Le résultat obtenu n'est pas la longueur de l'hypoténuse mais son carré. Il nous reste donc une dernière étape : obtenir l'hypoténuse sachant que c'est un nombre dont le carré vaut 145 000. Comment obtenir un tel nombre ? Eh bien grâce à la racine carrée (une bonne vieille calculatrice fera l'affaire car pour ma part je ne connais pas toutes les racines carrées possibles et imaginables) :

$$CD = \sqrt{145000} \approx 380,8cm$$

1.1.1. Renversons le problème

Mais comment aurais-tu fait si tu n'avais eu qu'un seul côté du triangle ?

Si l'on ne connaît qu'un seul côté du triangle, le théorème de Pythagore est inopérant, il faut bien l'admettre. Toutefois, imaginons que notre architecte ne connaisse que la largeur de la maison (toujours 350 cm) mais que les pentes de toiture réglementaires lui imposent qu'un pan de toit mesure 400 cm de longueur. Nous aboutissons alors à la figure suivante :

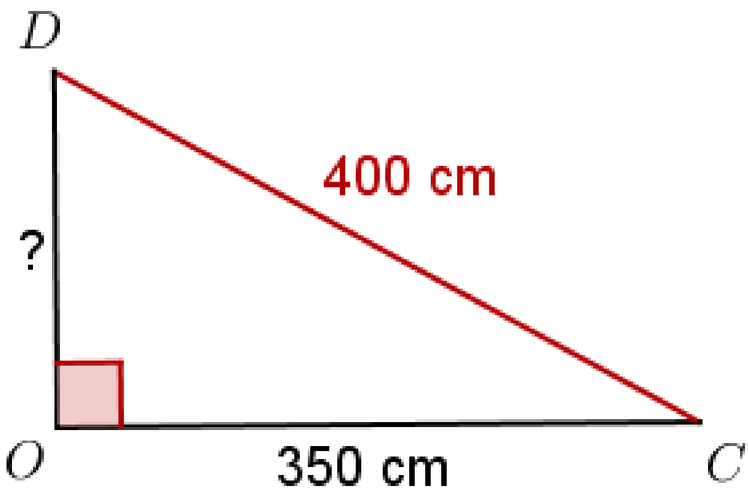


FIGURE 1.5. – Le problème remanié

Cette fois, nous connaissons une seule cathète et l'hypoténuse. Mais nous pouvons toujours appliquer le théorème de Pythagore. Commençons par calculer les carrés des côtés connus : $DC^2 = 400^2 = 160\,000$ et $OC^2 = 350^2 = 122\,500$. Le théorème de Pythagore nous donne alors l'égalité suivante :

$$122\,500 + OD^2 = 160\,000$$

Comment trouver OD^2 ? Si en lui ajoutant 122 500, on trouve 160 000 alors il suffit de soustraire 122 500 à 160 000 pour trouver sa valeur :

OD^2 &= 37\ ;500\ OD &= \sqrt{37\ ;500} \approx 193,65 cm\end{aligned}$$

1.2. Le problème du maçon et du charpentier

> ? Effectivement, c'est astucieux sauf que je n'ai jamais vu de maçon ou de charpentier déambuler sur un chantier avec une calculatrice.

En effet, cette technique est valable pour un architecte qui conçoit ses plans en intérieur, derrière sa table de dessin, mais elle devient un peu trop compliquée pour quelqu'un travaillant en extérieur sur un chantier. Il faut une technique encore plus rapide et efficace. Heureusement pour nous, le théorème de Pythagore vient à nouveau à notre secours, ou plutôt sa réciproque.

####Réciproque et contraposée du théorème de Pythagore

Et voilà encore un nouveau mot : **réciproque**. Qu'est-ce encore que cela ? C'est simple, on parle de propriété réciproque lorsque l'on formule une propriété en sens inverse. Par exemple, si l'on considère le dicton " *Lorsqu'il fait nuit, tous les chats sont gris* ", le dicton réciproque serait " *Lorsque tous les chats sont gris, il fait nuit* ".

?

Quel intérêt de créer un mot pour cela ? C'est la même chose !

Eh bien non justement ! Une propriété mathématique peut-être vraie et avoir une réciproque fausse. La propriété réciproque est une nouvelle propriété à part entière. Prenons un exemple simple : " *Si mon ballon est un ballon de foot, alors il est rond* ". Quoi de plus logique ? La réciproque de cette phrase serait : " *Si mon ballon est rond, alors c'est un ballon de foot* ". Aïe ! Cette dernière phrase n'est pas vraie : pour s'en convaincre il suffit de se rappeler que les ballons de hand ball, de basket ou de volley sont ronds eux aussi. Mais heureusement pour nous, le théorème de Pythagore a une réciproque qui fonctionne et dont voici l'énoncé (je vous invite à essayer de le formuler vous-même avant de le lire) :

!

Si le carré du plus grand côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

Vous remarquerez que je ne parle plus d'hypoténuse ou de cathètes. Et pour cause, au début de l'énoncé, nous considérons un triangle quelconque vérifiant seulement une égalité particulière. Ce n'est qu'à la toute fin de la propriété que l'on découvre qu'il est rectangle et que l'on peut donc parler d'hypoténuse et cathètes. Enfin, que nous dit cette fameuse réciproque ? Elle nous dit que si l'on connaît les trois côtés d'un triangle et qu'en les élevant tous les trois au carré et en additionnant les deux plus petits, on trouve la valeur du carré du plus grand, alors on peut être certain que ce triangle est rectangle. C'est donc ce principe que notre maçon va devoir utiliser. Reste seulement à trouver trois longueurs vérifiant la réciproque de Pythagore et qui soient faciles à retenir.

Mais avant cela il reste une question en suspens : et si un triangle ne vérifie pas l'égalité de Pythagore, est-on certain qu'il n'est pas rectangle ou existe-t-il des cas particuliers qui seraient tout de même rectangles ? Ça, la réciproque ne le dit pas. Mais ce genre de cas particulier est impossible car il contreviendrait au Théorème de Pythagore lui-même. Supposons qu'il existe un triangle ne vérifiant pas l'égalité mais qui serait tout de même rectangle : le fait qu'il soit rectangle nous permettrait alors d'utiliser le théorème de Pythagore qui nous assurerait qu'il vérifie l'égalité, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse initiale. Pour être plus clair encore, on peut formuler la propriété suivante :

!

Si le carré du plus grand côté d'un triangle est différent de la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle n'est pas rectangle.

Cette troisième propriété est ce que l'on appelle la **Contraposée du théorème de Pythagore**. La contraposée d'une propriété n'est rien d'autre que la même propriété, formulée de manière négative. Par exemple, la propriété " *Si j'ai 35 ans alors je suis majeur* " peut se reformuler ainsi : " *Si je ne suis pas majeur alors je ne peux pas avoir 35 ans* ". Par conséquent, la contraposée d'un théorème est obligatoirement vraie car équivalente au théorème lui-même.

####Résolution du problème du maçon

Mais revenons-en à nos maçons. Euh ... nos moutons ! Comment peut-on s'assurer que deux murs sont biens perpendiculaires à l'aide de la réciproque ou de la contraposée de Pythagore ? Pour cela, nous devons au préalable trouver trois longueurs vérifiant l'égalité de Pythagore et qui soient des nombres entiers de préférence. C'est ce que l'on appelle un triplet pythagoricien, et il en existe une infinité. A vous de jouer !

Vous n'en trouvez pas ? Alors lisez bien cette vieille astuce d'artisan. Notre maçon va devoir se placer à l'intersection des deux murs (dans le coin, quoi). A l'aide de son mètre, il devra mesurer 3m le long du premier mur et faire une marque au sol (à la craie ou à la bombe de peinture). Puis il recommencera sur le second mur en mesurant cette fois 4m. Si les deux murs sont bien perpendiculaires, alors il devrait mesurer 5m d'écart entre ses deux marques. Vous voulez une preuve ?

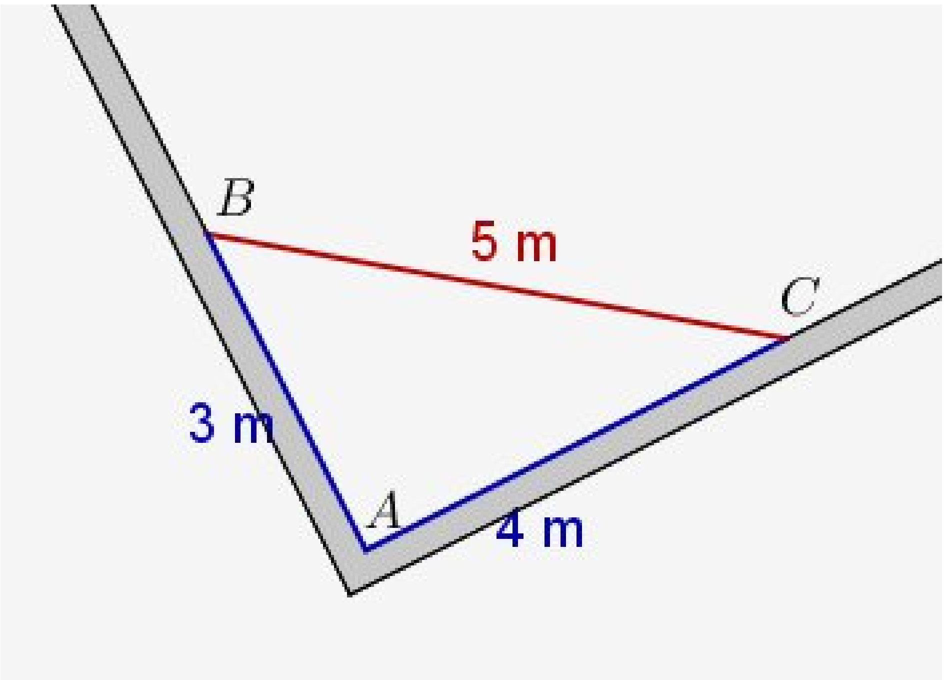


FIGURE 1.6. – Les murs du maçon

Avec les notations de la figure, calculons la somme des carrés des deux petits côtés :

$$AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

Et maintenant, passons au carré du plus grand côté : $BC^2 = 5^2 = 25$.

On constate bien que $BC^2 = AB^2 + AC^2$ et d'après la réciproque de Pythagore, le triangle ABC est bien rectangle. Le triplet pythagoricien 3/4/5 est le plus simple de tous, c'est pourquoi il est souvent utilisé. Certains charpentiers utilisent quant à eux le triplet 6/8/10 qui n'est rien d'autre que le double du précédent. Pratique, non ?

———

A retenir

- **Théorème de Pythagore** : Si un triangle est rectangle, alors le carré de son hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés. - Le théorème de Pythagore est un puissant outil permettant de **calculer une longueur** manquante dans un triangle rectangle. - **Réciproque du Théorème** : Si le carré du plus grand côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle. - La réciproque du théorème de Pythagore permet de **s'assurer qu'un triangle est rectangle**.

Quelques preuves du théorème

[[question]] | C'est bien gentil ces calculs, mais comment peut-on être certain que cela marche vraiment ?

Depuis Thalès, les mathématiques ne sont plus un simple catalogue de trucs et astuces. L'exigence de démonstration s'est imposée et toute affirmation doit être prouvée non pas sur quelques exemples bien choisis mais dans des cas généraux pouvant être appliqués à n'importe quelle situation particulière. Ainsi, tant qu'une affirmation n'est pas prouvée, elle reste dans la famille des **conjectures** mathématiques. Si donc la propriété que nous étudions porte le titre honorifique de "théorème", c'est bien qu'elle a été prouvée. Et non contente de l'avoir prouvée, la communauté mathématique s'est même amusée à fournir des centaines de démonstration. Je vous propose donc d'en découvrir quelques-unes.

Démonstration d'Euclide par les triangles de même aire

Une histoire d'aires

Chose promise, chose due ! Je vous présente désormais une démonstration du théorème de Pythagore. Comme dit plus haut, nous ne disposons d'aucun écrit signé de la main de Pythagore. La démonstration que je vous propose ici est due à un autre mathématicien postérieur : Euclide d'Alexandrie. Pour prouver le théorème, nous allons utiliser la figure ci-dessous :

![Figure initiale de notre démonstration](/media/galleries/483/0a8baf6e-16c0-4e76-9fee-339bcb33ab25.png.96

En effet, lorsque l'on calcule AB^2, on calculer en réalité l'aire de carré bleu. De même AC^2 sera l'aire du carré vert et BC^2 l'aire du rouge. Ainsi, prouver la formule de Pythagore $AB^2 + AC^2 = BC^2$ revient à montrer l'égalité suivante : (1.-2)

Euclide commence sa démonstration en découpant le triangle rectangle et le carré rouge. Pour cela, il trace la hauteur issue de A, partageant ainsi le grand carré rouge en deux rectangles vert et bleu.

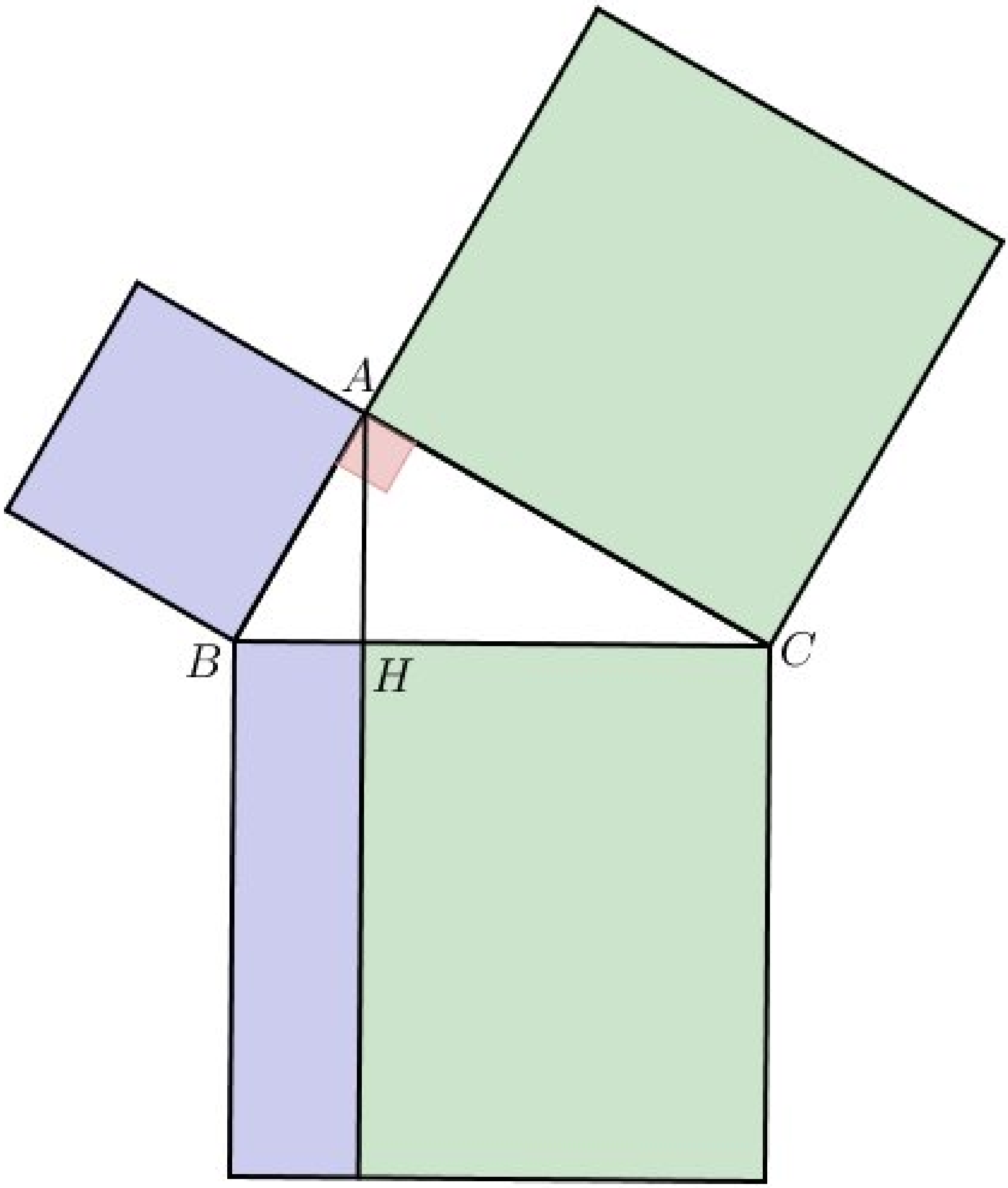


Figure 1.7. – Partage de la figure

Son idée est que le carré bleu a la même aire que le rectangle bleu et que le carré vert a la même aire que le rectangle vert. S'il parvient à montrer cela, alors c'est gagné ! Mais montrer l'égalité des aires de deux quadrilatères est plutôt compliqué. Euclide va donc préférer utiliser des triangles et utiliser une propriété que je vous propose de découvrir.

1.2.1. Déformez, déformez ! Il restera toujours la même aire.

> Si on déplace un sommet d'un triangle parallèlement au côté opposé, alors le triangle obtenu a la même aire que le triangle initial.

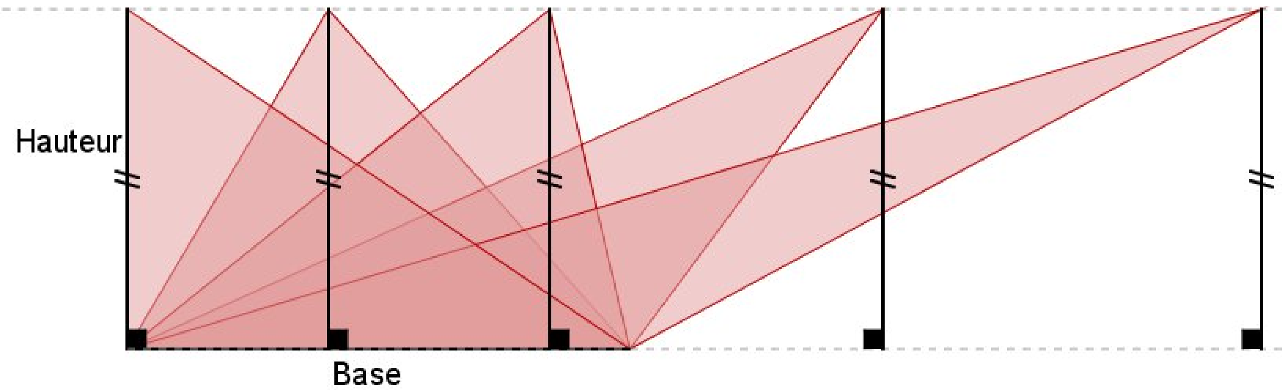


Figure 1.8. – Tous ces triangles ont la même aire

La raison est bien simple, la hauteur et la base de tous ces triangles sont identiques. Et comme l'aire d'un triangle se calcule à l'aide de la formule $\frac{\text{Base}\times\text{Hauteur}}{2}$, tous ces triangles ont la même aire.

1.2.2. La mise en œuvre

Euclide va donc appliquer ce principe au demi-carré bleu :

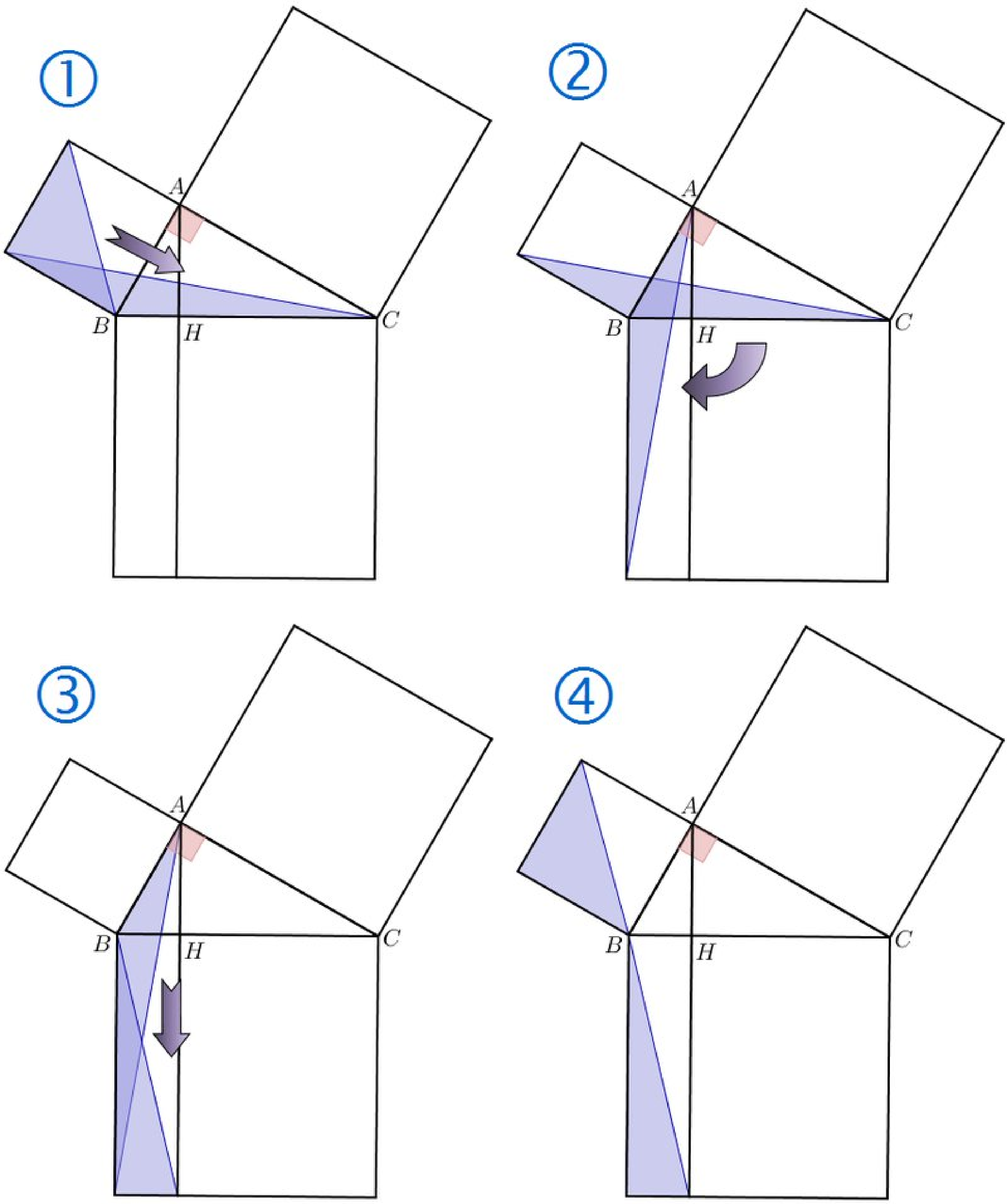


Figure 1.9. – Les transformations d'Euclide

1. Euclide fait glisser l'un des sommets jusqu'en dehors du carré. Il obtient ainsi un triangle "plus allongé" mais de même aire.
2. Ceci fait, il fait pivoter le nouveau triangle de 90° pour en obtenir un troisième qui a toujours la même aire.

3. Enfin, Euclide recommence le premier procédé et fait glisser un sommet pour reconstituer un demi-rectangle bleu.
4. Le demi-rectangle bleu obtenu après toutes ces transformations a donc exactement la même aire que le demi-carré bleu initial !

Euclide put ainsi en déduire que le carré bleu et le rectangle bleu avaient la même aire. Il suffisait de recommencer ces transformations avec le carré et le rectangle verts pour constater que la somme des aires des deux petits carrés valait l'aire du grand :

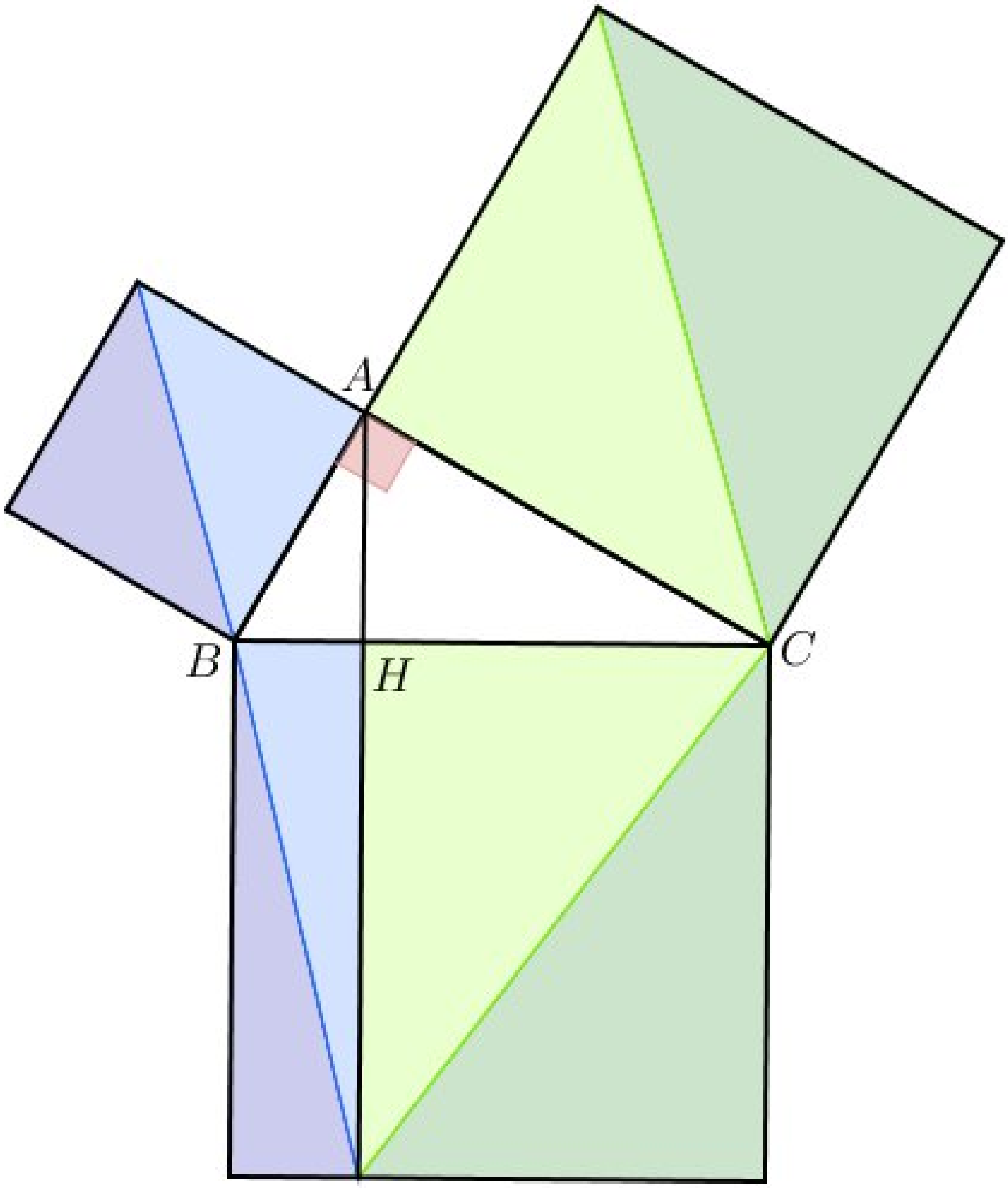


Figure 1.10. – Eurêka

1.3. Démonstration de Liu Hui par découpage

1.3.1. Comprendre le puzzle chinois

Intéressons-nous maintenant à la démonstration que fournit le traité mathématique chinois *Les neufs chapitres sur l'art mathématique*. Ce traité, apparu vers le II$^{\text{ème}}$ siècle avant JC, fut plus tard analysé par le mathématicien Liu Hui qui l'annota et le compléta de quelques démonstrations. La démonstration qu'il fournit du théorème de Pythagore (appelé **Théorème de Gougu** en Chine), est très différente des démonstrations occidentales et repose sur l'idée du découpage des figures (à la façon des célèbres origamis et kirigamis japonais).

Gougu n'est pas le nom d'un mathématicien chinois ! Cela pourrait être traduit par "Théorème des bases et hauteurs".

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/

Figure 1.11. – Extrait des neufs chapitres sur l'art mathématique

Comme vous pouvez le voir sur l'image ci-dessus, la figure utilisée par Liu Hui est fort différente de celle d'Euclide. La démonstration est fort simple, mais il faut au préalable comprendre les enjeux contenus dans cette figure. Commençons par nommer les sommets de la figure :

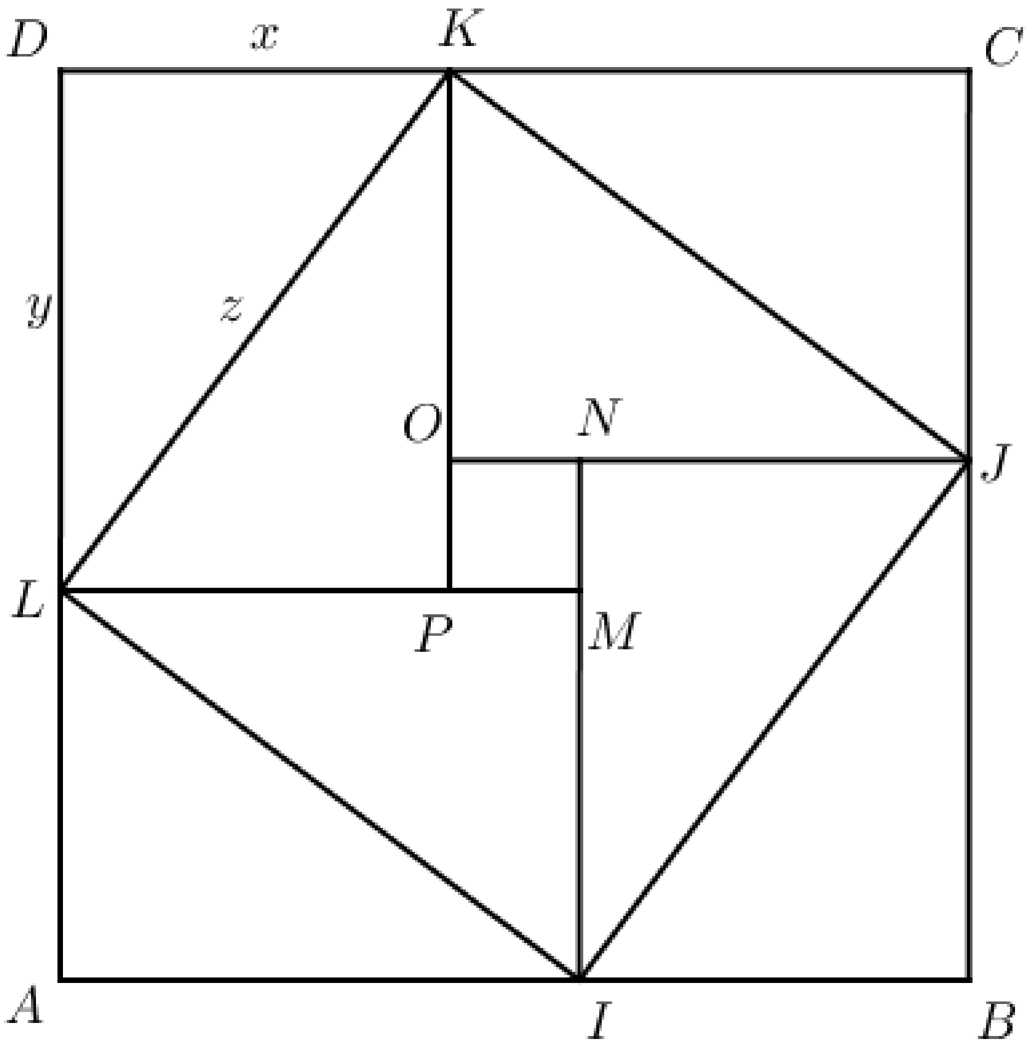


FIGURE 1.12. – Théorème de Gougu

Il y a beaucoup de triangles rectangles identiques dans cette figure, on s'y perd un peu : DLK, LKP, KCJ, KOJ, LAI, LMI, INJ et IJB sont tous des triangles rectangles de longueurs x, y, z. Vous constatez qu'ils sont groupés par paires afin de former 4 rectangles (AIML, BJNI, CKOJ et DLPK). Ces 4 rectangles sont disposez afin de former un grand carré extérieur ABCD et un petit carré intérieur MNOP. De plus, les hypoténuses des triangles rectangles forment un carré médian IJKL.

?

Tu es sûr que IJKL est un carré ? Je me doute bien qu'il a 4 côtés égaux, mais il n'a pas forcément d'angles droit.

Vous savez sûrement que la somme des angles d'un triangle vaut 180° ? On peut préciser cette propriété pour les triangles rectangles. Ceux-ci ayant obligatoirement un angle de 90°, la somme des deux autres angles vaut donc $180 - 90 = 90°$. On dit alors que les angles aigus d'un triangle rectangle sont **complémentaires**. Si on regarde alors la figure ci-dessus, on constate par exemple que les angles $\widehat{LKP}$ et $\widehat{OKJ}$ sont complémentaires : IJKL a donc bien 4 angles droits.

Si l'on prend le triangle rectangle DLK, alors notre but est de montrer que $DL^2 + DK^2 = LK^2$. Mais pour limiter les confusions dans toutes ces lettres, nous allons reformuler cette égalité en $x^2 + y^2 = z^2$. On comprend alors que z^2 correspond à l'aire du carré médian IJKL. Mais alors, à quoi correspondent x^2 et y^2 ? C'est moins évident. Il faut en fait tracer deux nouveaux carrés, par exemple un de côté [JB] dont l'aire vaudra y^2 et un côté [LP] dont l'aire vaudra x^2.

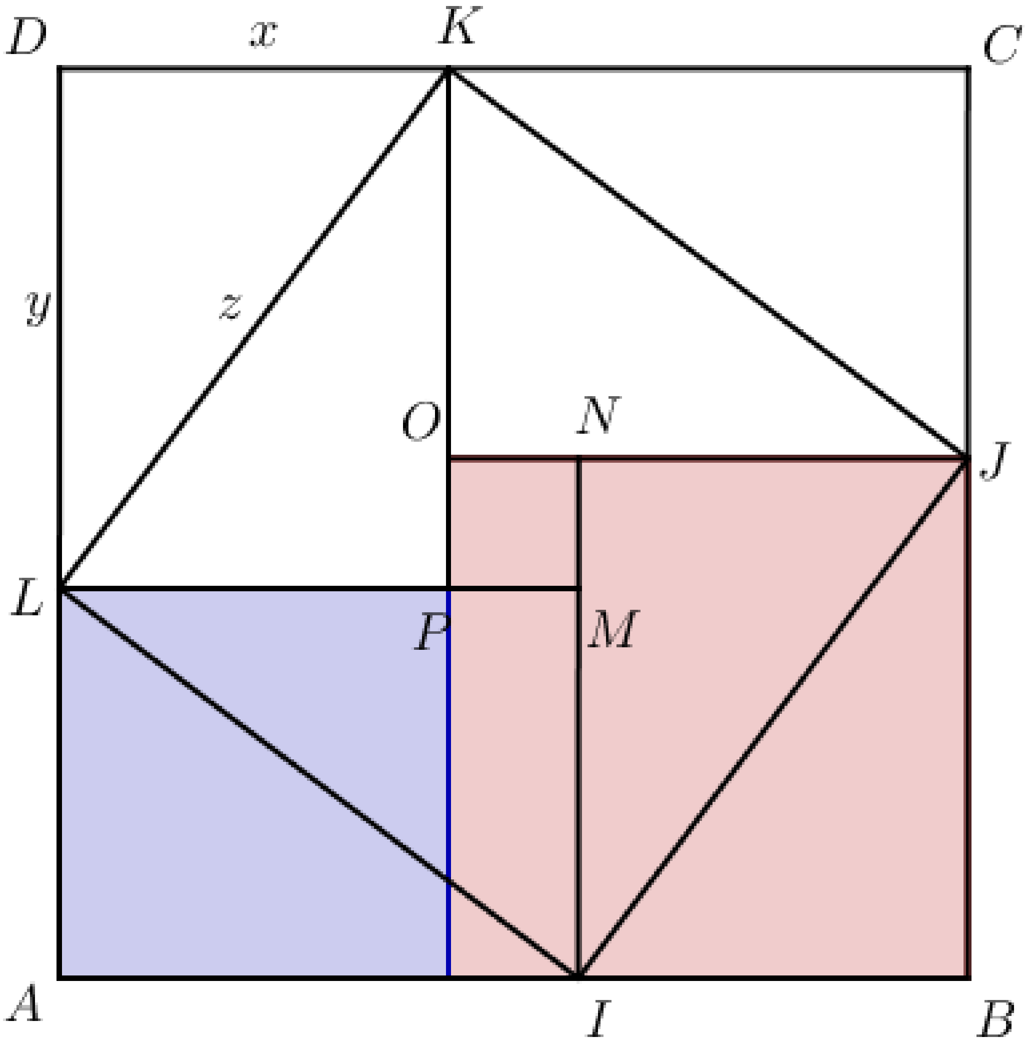


FIGURE 1.13. – x² est l'aire du carré bleu ; y² celle du carré rouge

1.3.2. Reconstituer le puzzle

Maintenant, démontrer que $x^2 + y^2 = z^2$ revient à montrer qu'en déplaçant certaines pièces des carrés rouges et bleus, on parvient à reformer le carré IJKL. Il ne s'agit ni plus ni moins que d'un jeu de tangram, vous êtes donc à même de trouver les mouvements à effectuer par vous-même. Si vous n'y êtes pas arrivés, sachez qu'il suffit de déplacer les triangles IJB et LIA comme expliqué ci-dessous :

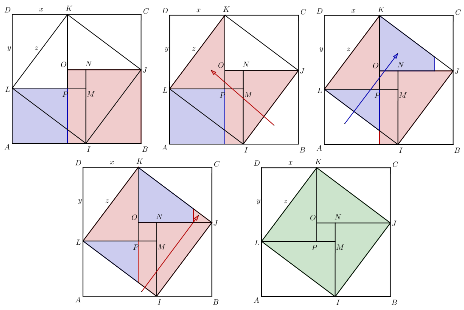


Figure 1.14. – Les étapes de la démonstration de Liu Hui

Cette démonstration par découpage semble très différente de la précédente, pourtant de très nombreuses démonstrations du théorème de Pythagore sont basées sur ce principe.

1.4. Démonstration par les triangles semblables

1.4.1. Qu'appelle-t-on des triangles semblables ?

On dit que des triangles sont semblables s'ils ont la même forme, c'est-à-dire qu'ils ont des angles égaux et des longueurs proportionnelles. Sur la figure ci-dessous, on constate que les deux premiers triangles ont des longueurs différentes mais une forme similaire, contrairement au troisième qui partage quelques longueurs avec le premier mais dont la forme est plus "étirée".

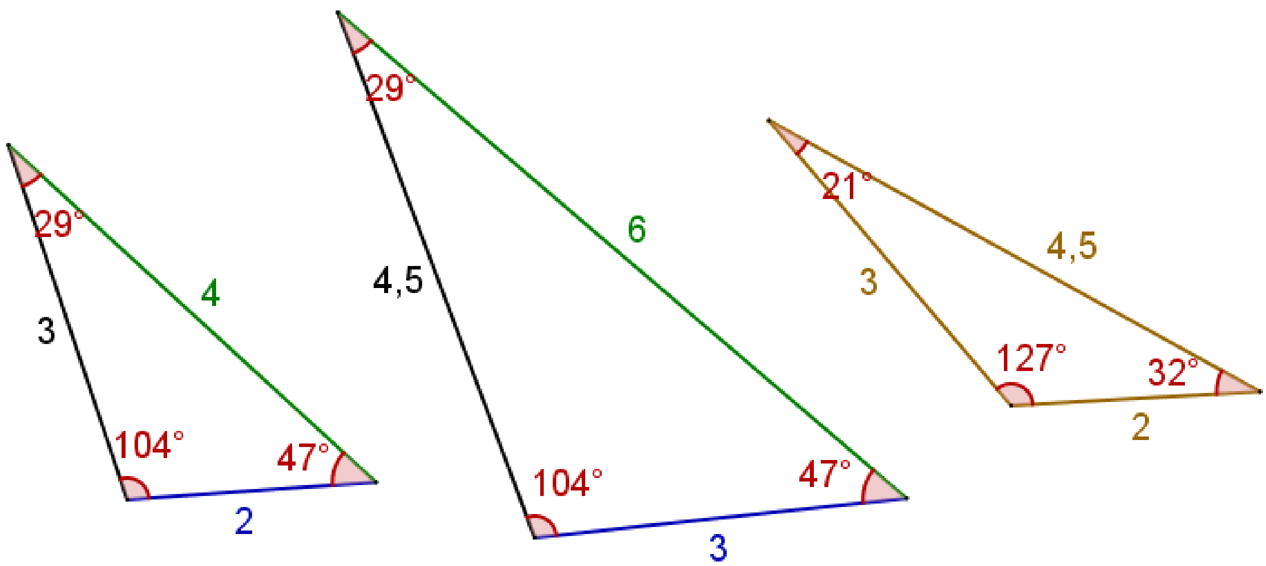


Figure 1.15. – Deux triangles semblables et un contre-exemple

On dit que les deux premiers triangles sont semblables :

- ils ont les mêmes angles,
- le deuxième triangle est 1,5 fois plus grand que le premier. Le nombre 1,5 est appelé **coefficient d'agrandissement**.

Le périmètre du premier triangle est égal à $2+3+4=9$ et le périmètre du second est égal à $3+4,5+6=13,5$. Mais on peut remarquer que $9\times 1,5=13,5$. Cet exemple nous permet de constater que si deux triangles sont semblables et liés par un coefficient d'agrandissement k, alors leurs périmètres sont eux aussi liés par ce même coefficient k.

Logique ? Alors venons-en aux aires. Pour cela, nous allons utiliser notre bon vieux triangle (3 ;4 ;5). Le calcul de l'aire d'un triangle rectangle se fait facilement grâce à la formule :

$$A = \frac{\text{largeur} \times \text{Longueur}}{2} = \frac{3\times 4}{2} = 6$$

Prenons maintenant un triangle semblable deux fois plus grand : (6 ;8 ;10). Son aire devient : $A = \frac{l\times L}{2} = \frac{6\times 8}{2} = 24$. On obtient une aire non pas 2 fois plus grande mais 4 fois ! Réessayons avec un triangle trois fois plus grand : (9 ;12 ;15). L'aire vaut alors $A = \frac{l\times L}{2} = \frac{9\times 12}{2} = 54$, soit une valeur 9 fois plus grande que prévue. On peut généraliser ce constat : si deux triangles sont semblables et liés par un coefficient d'agrandissement k, alors leurs aires sont liées par un coefficient k^2.

Cela signifie qu'un triangle dont les côtés sont 5 fois plus grands qu'un autre aura une aire $5^2 = 25$ fois plus grande.

1.4.2. Reredémontrons

Pour notre troisième démonstration, nous allons faire apparaître des triangles semblables en traçant la hauteur issue de l'angle droit. Ainsi, sur la figure ci-dessous, le triangle ABC rectangle en B est partagé en deux triangles ABH et BHC eux aussi rectangles.

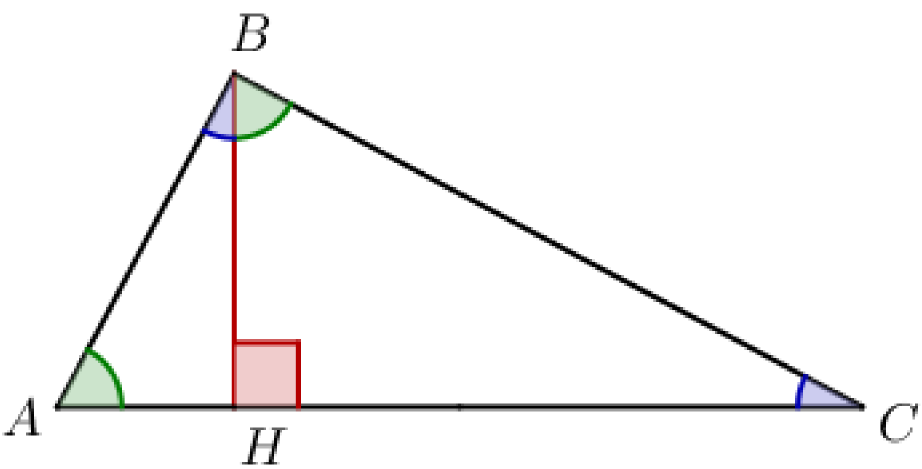


FIGURE 1.16. – ABC rectangle en B de hauteur [BH]

Commençons par expliquer pourquoi ces trois triangles sont semblables. Nous avons vu dans la précédente démonstration que les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires (rappel : leur somme vaut 90°). Autrement dit, dans le triangle ABC $\widehat{ACB} = 90 - \widehat{BAC}$. Mais dans le triangle ABH, cette propriété nous donne $\widehat{ABH} = 90 - \widehat{BAC}$, la même valeur ! Donc

$\widehat{ACB} = \widehat{ABH}$. Les triangles ABH et ABC ont dont les mêmes angles (un angle droit, un vert et un bleu), ils sont donc semblables. Le même raisonnement peut être fait avec le triangle BHC.

Pour y voir plus clair entre les différentes longueurs en situation de proportionnalité, dressons un tableau :

$$Hypotnuse Petite cathte Grande cathte$$

Triangle ABC	AC	AB	BC
Triangle ABH	AB	AH	BH
Triangle BHC	BC	BH	HC

Le fait que les deux première lignes soient proportionnelles nous permet d'écrire l'égalité de rapport suivante en divisant la première ligne par la seconde : $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AH} (= \frac{BC}{BH})$. En effectuant un produit en croix entre les deux premières fractions, on obtient que $AB^2 = AC \times AH$.

De même, on obtient l'égalité de rapport suivante en divisant la première ligne par la troisième : $\frac{AC}{BC} (= \frac{AB}{BH}) = \frac{BC}{HC}$. Le produit en croix entre la première et la dernière fraction donne alors $BC^2 = AC \times HC$. Maintenant que nous avons fait apparaître les carrés des cathètes, additionnons les deux égalités obtenues :

&= AC \times (AH + HC)\ &= AC \times AC\ &= AC^2 \end{aligned}$$

1.4.3. Supplément

Vous aurez peut-être remarqué que nous n'avons pas établi d'égalité de rapport entre la deuxième et la troisième ligne ? Cette égalité ne nous aurait avancé à rien pour la démonstration du théorème de Pythagore. Toutefois, elle apporte un résultat intéressant. Cette égalité est : $(\frac{AB}{BC} =) \frac{AH}{BH} = \frac{BH}{HC}$. Le produit en croix nous donne enfin :

$$BH = \sqrt{AH \times HC}$$

Nous obtenons ainsi une formule permettant de calculer la hauteur issue de l'angle droit en ne connaissant que l'emplacement du point H sur l'hypoténuse. Mieux que cela ! La hauteur issue de l'angle droit est égale à la moyenne géométrique des distances à gauche et à droite du pied de la hauteur sur l'hypoténuse.

[[information]] | Lorsque nous connaissons deux nombres x et y, nous calculons leur moyenne ainsi : $\frac{x+y}{2}$. Cette moyenne n'est en fait qu'une moyenne parmi d'autres et s'appelle plus exactement la **moyenne arithmétique**. Une autre moyenne possible est la **moyenne géométrique** qui se calcule ainsi :$\sqrt{x \times y}$. Mais il en existe d'autres encore comme la **moyenne harmonique** $(\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}})$ ou la **moyenne quadratique** $(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}})$.

Si ce petit challenge mathématique vous a plus, sachez que le théorème de Pythagore est sûrement celui qui a le plus de démonstrations à son actif. Vous en trouverez à foison sur Internet ou dans les livres, datant de diverses époques et apparue aux quatre coins de la planète. Il existe même une démonstration découverte par un président des États-Unis à ses heures perdues.

Quelques exercices d'application

Nous savons désormais que le théorème de Pythagore ne s'applique que dans un triangle rectangle. Oui mais des triangles rectangles, on peut en trouver dans bien des figures géométriques, il suffit d'un angle droit, d'une hauteur ou d'une médiatrice. Par conséquent, notre cher théorème va nous permettre de calculer des longueurs inconnues, que ce soit dans des rectangles, des cubes ou des triangles non rectangles. Je vous propose ici un assortiment d'exercices de difficultés variables dont les solutions seront réutilisées dans le prochain chapitre. Chaque partie commence par un exercice accessible aux débutants et ouvrant la voie au second exercice, plus complexe ou nécessitant des connaissances en algèbre.

Diagonales de rectangles et de carrés

Diagonale du rectangle

Énoncé

[[question]] | Quelle est la longueur de la diagonale d'un rectangle de largeur 8 cm et de longueur 15 cm ?

![Calculer BD](/media/galleries/483/96935fb0-5d35-45c7-a15f-19f39d5afd7f.png.960x960$_q$85.jpg)

Solution

Cet exercice est le plus simple de tous. En traçant la diagonale [BD], on fait apparaître deux triangles rectangles. Il suffit donc de se placer dans l'un des deux, par exemple ABD. Le théorème de Pythagore donne ainsi :

$BD^{2\ \&=\ 15}2 + 8^{2\ \backslash\ BD}2$ &= 225 + 64 \ BD^2 &= 289 \ BD &= \sqrt {289} = 17 cm\end{aligned}$$

1.4.4. Diagonale du carré

1.4.4.1. Énoncé

?

Quelle est la longueur de la diagonale d'un carré de côté a ?

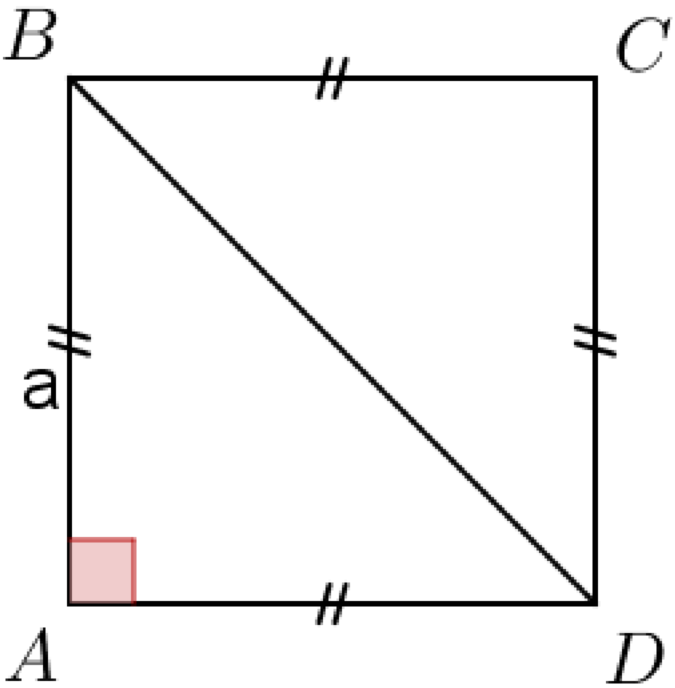


Figure 1.17. – Calculre BD

1.4.4.2. Solution

Il suffit là encore de tracer une diagonale pour qu'un carré soit partagé en deux triangles rectangles. Il est donc possible d'appliquer le théorème de Pythagore. La difficulté réside ici dans l'utilisation non plus d'un nombre connu mais d'une lettre a symbolisant n'importe quel nombre positif. Fions-nous au travail effectué précédemment :

$$BD^2 = a^2 + a^2 BD^2 = 2a^2 BD = \sqrt{2a^2}$$

Nous arrivons à un résultat bizarroïde et incalculable : $\sqrt{2a^2}$. Toutefois, il est possible d'améliorer l'écriture de ce résultat grâce à une propriété des racines carrées. Prenons un exemple. On sait que $\sqrt{36} = 6$ mais on sait aussi que $36 = 9 \times 4$. Or $\sqrt{9} \times \sqrt{4} = 3 \times 2 = 6$ donc on peut écrire que $\sqrt{9 \times 4} = \sqrt{9} \times \sqrt{4}$. Plus généralement :

[[attention]] | -> $\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$, avec x et y positifs ou nuls. <-

Attention, cette propriété fonctionne avec la multiplication, mais pas avec l'addition ou la soustraction. Un contrexemple suffira à s'en convaincre. On sait que $\sqrt{25} = 5$. Mais 25 peut se décomposer en 16 + 9. Or, $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7 \neq 5$.

Revenons à notre carré de côté a. Nous avons écrit que sa diagonale mesurait $\sqrt{2a^2}$, ce qui peut s'affiner :

{}&= \sqrt 2 \times \sqrt{a^2} \ {}&= \sqrt 2 \times a \ {}&= a \sqrt 2\end{aligned}$$

Autrement dit, si l'on connaît le côté d'un carré, il suffit de multiplier par $\sqrt{2}$ pour connaître sa diagonale.

1.4.4.3. La duplication du carré

Cette propriété permet de résoudre un antique problème, celui de la **duplication du carré**. Le but de ce problème est de construire à la règle non graduée et au compas, un carré dont l'aire est exactement le double de celle d'un carré donné. Il n'est pas question de mesurer les longueurs ou les angles ! Vous ne pouvez faire que des droites et des cercles.

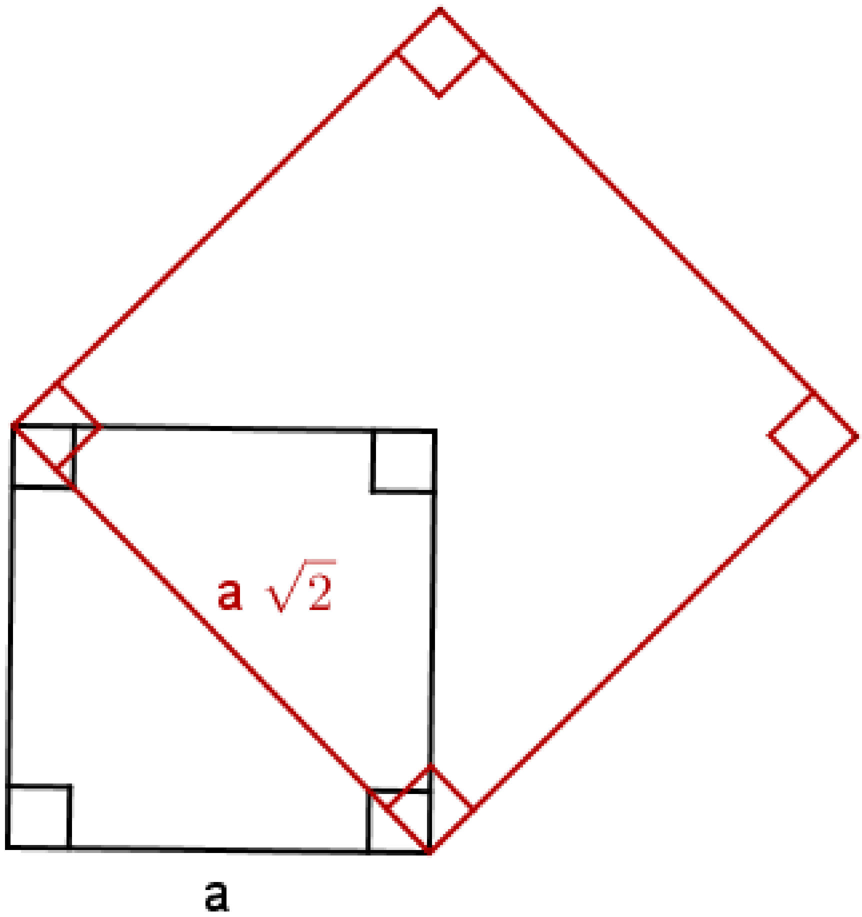


FIGURE 1.18. – Duplication du carré

La solution est maintenant simple. Pour un carré de côté a, l'aire vaut $a \times a = a^2$. En construisant comme ci-dessus un carré le long de sa diagonale, on obtient un côté de longueur $a\sqrt{2}$ et une aire de $a\sqrt{2} \times a\sqrt{2}$. Cependant :

$$= a^2 \times \sqrt{2}^2 = a^2 \times 2$$

Le carré obtenu a donc une aire double du premier.

Diagonales de pavés et de cubes

Passons désormais aux figures en 3 dimensions, les solides. Les deux exercices que je vous propose ressemblent beaucoup à ceux déjà effectués avec le rectangle et le carré.

Diagonale du parallélépipède rectangle

Énoncé

[[question]] | Quelle est la longueur de la diagonale d'un parallélépipède rectangle de dimensions 3 cm / 4 cm / 12 cm ?

!\[Calculer AG\](/media/galleries/483/81081542-e46e-4b3f-bd5d-f5a39c7ef0f7.png)

Solution

Avant de calculer AG, il est important de faire apparaître un triangle rectangle dont [AG] est un côté. Nous allons prendre ici le triangle ACG. Mais nous avons un soucis : nous ne connaissons qu'un seul de ses côtés. Qu'à cela ne tienne : nous allons d'abord calculer un second côté de ACG. Pour cela nous devons trouver un deuxième triangle rectangle ayant [AC] pour côté.

Prenons par exemple le triangle ADC rectangle en D. Ses cathètes mesurent 3 cm et 4 cm. Vous devriez déjà avoir repéré le fameux triplet pythagoricien 3/4/5 dont nous avons déjà parlé lors du problème du maçon. Je vous fais donc grâce de ces calculs.

Nous pouvons enfin en revenir au triangle ACG dont nous connaissons désormais les cathètes : AC = 5 cm et CG = 12 cm. Le théorème de Pythagore nous donne alors :

AG$^{2\ \&=\ 5}$2 + 12$^{2\ \backslash\ AG}$2 &= 25 + 144 \ AG^2 &= 169 \ AG &= \sqrt {169} = 13 cm\end{aligned}$$

1.4.5. Diagonale du cube

1.4.5.1. Énoncé

Déterminer la longueur de la diagonale d'un cube d'arête a.

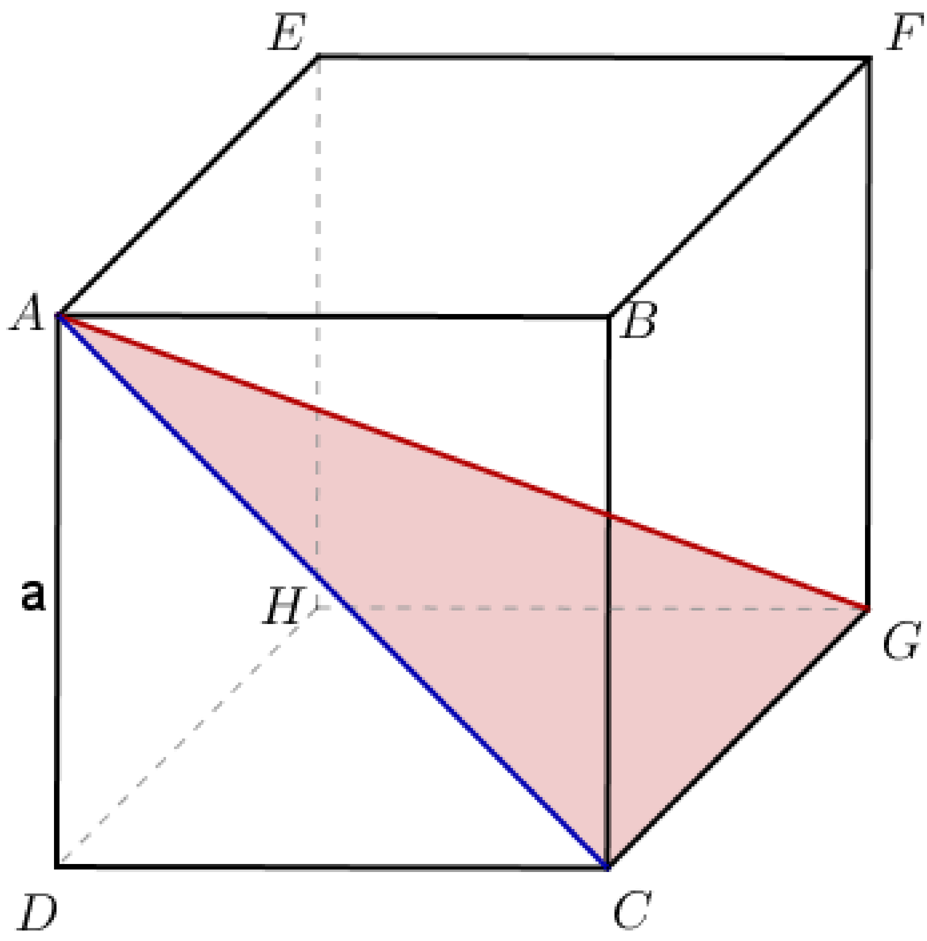


Figure 1.19. – Calculer AG

1.4.5.2. Solution

Le raisonnement à suivre est ici le même que durant l'exercice du parallélépipède rectangle :

— calculer d'abord AC avec le théorème de Pythagore dans le triangle ADC,
— en déduire ensuite AG en utilisant le triangle ACG.

Mais rappelez-vous l'exercice sur la diagonale du carré : nous savons déjà qu'un carré de côté a dispose d'une diagonale de longueur $a\sqrt{2}$. Nous pouvons donc en déduire sans plus de cérémonie que $AC = a\sqrt{2}$. Reste donc seulement le calcul de AG :

$$AG^2 = (a\sqrt{2})^2 + a^2 AG^2 = a^2 \times \sqrt{2}^2 + a^2 AG^2 = a^2 \times 2 + a^2 AG^2 = 2a^2 + a^2 AG^2 = 3a^2 AG = \sqrt{3a^2}$$

Nous appliquons alors la même simplification que lors du calcul de la diagonale du carré :

{} &= \sqrt 3 \times \sqrt {a^2}\ {} &= \sqrt 3 \times a\ {} &= a \sqrt 3\end{aligned}$$

Nous arrivons donc à ce résultat intéressant que la diagonale d'un carré de côté a vaut $a\sqrt{2}$, que la diagonale d'un cube d'arête a vaut $a\sqrt{3}$.

Nous pourrions même élargir cette propriété à des espaces ayant plus que 3 dimensions. Même si ces espaces sont difficiles à visualiser, rien ne nous empêche d'imaginer des espaces à 4, 5, 6 dimensions ou plus encore. L'équivalent du carré et du cube dans un espace à 4 dimensions se nomme alors hypercube, l'équivalent du cercle ou de la sphère se nommer hypersphère etc. Ainsi, avec une 4$^{\text{ème}}$ dimension, la diagonale d'un hypercube à 4 dimensions et d'arête a vaudrait $a\sqrt{4} = 2a$, alors qu'avec une 5$^{\text{ème}}$ dimension elle vaudrait $a\sqrt{5}$...

1.4.5.3. Duplication du cube

Comme pour le carré, nous en venons donc au problème de la duplication du cube :

Un cube étant donné, construire à la règle non graduée et au compas un cube dont le volume sera le double du premier.

Vus les résultats obtenus pour le carré et le cheminement très similaire de nos réflexions en 2D et en 3D, vous devriez déjà avoir une idée. Il suffirait de tracer la diagonale du premier cube (dont le volume est $a \times a \times a = a^3$) puis de construire un cube reposant sur ladite diagonale. Comme celle-ci mesure $a\sqrt{3}$, le volume du cube obtenu sera :

$$= a \times a \times a \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = a^3 \times 3\sqrt{3}$$

Et c'est là que ça coïnce ! Le cube obtenu a un volume non pas 2 fois mais $3\sqrt{3}$ fois plus grand. Avec la diagonale d'une des faces carrées du cube, peut-être ? Hélas, le cube obtenu aurait un volume $2\sqrt{2}$ fois plus grand. C'est mieux, mais toujours insuffisant. Allez, je vous laisse réfléchir par vous-même. La solution n'est en fait pas si compliquée.

Alors, vous n'avez pas trouvé ? Vous voulez la solution ? C'est simple : ce problème est insoluble. :p
Posé au cours du VI$me^{s}icleavantnotrere, ilaurafalluattendreleXIXme^{p}ourconnatrelarponse.Ceproblme$
$*troisgrandsproblmesantiques**, troisproblmesdeconstructionlargleetaucompasquidonnrenttantdemau$
$*trisectiond'unangle**(sonpartageentroispartsgales)etlaclbre**quadratureducercle**(constructiond'un$
$le**5me^{p}ostulatd'Euclide**, propritlmentaireindmontrabledelagomtrie.$

Hauteur d'un triangle

Hauteur d'un triangle isocèle

Énoncé

[[question]] | Dans un triangle isocèle de base 10 cm et dont les deux autres côtés mesurent 13 cm, calculer la hauteur relative à la base.

`![Calculer IM](/media/galleries/483/0f6073a0-82b4-4be2-9aff-0e55ed5da502.png)`

Solution

Il s'agit ici de calculer la longueur IM. Le triangle étant isocèle, la hauteur (IM) partage le triangle en deux triangles rectangles de mêmes longueurs. On trouve que $MS = 10 \div 2 = 5cm$. On peut donc utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle IMS par exemple. Mais attention, on connaît cette fois l'hypoténuse du triangle. Ce que l'on cherche, c'est l'un des cathètes.

IM^{2} $^{\&= 13}$2 - 5^{2} $^{\backslash\ IM}$2 &= 169 - 25 \ IM^2 &= 144 \ IM &= \sqrt {144} = 12 cm\end{aligned}$$

1.4.6. Hauteur d'un triangle équilatéral

1.4.6.1. Énoncé

? Quelle est la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1 cm ?

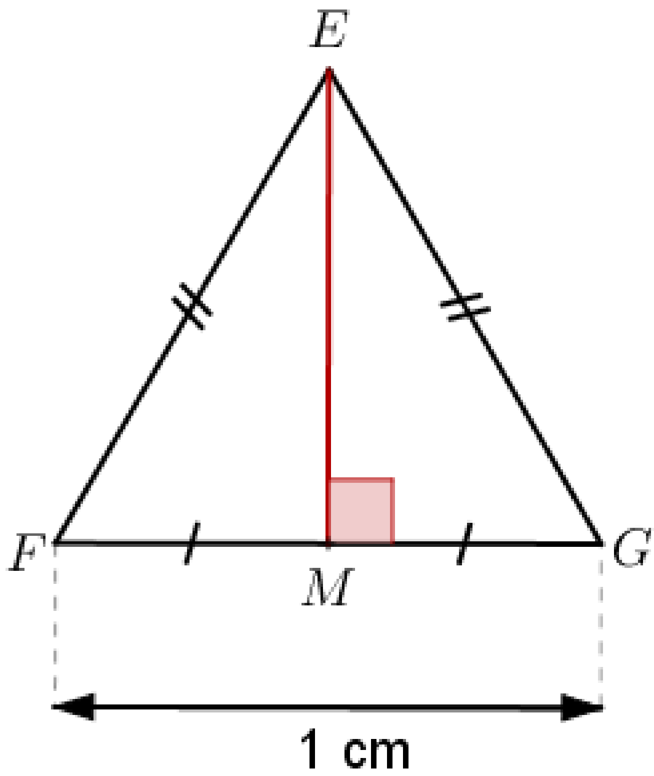


FIGURE 1.20. – Calculer EM

1.4.6.2. Solution

Contrairement à la diagonale du carré, j'ai décidé ici de vous épargner. Le côté du triangle équilatéral n'est pas une inconnu, mais un nombre très simple : 1. La logique est ici la même que pour le triangle isocèle : le triangle EFM est rectangle en M, son hypoténuse mesure 1 cm et $FM = \frac{1}{2}cm$. Reprenons le calcul précédent :

$$EM^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 EM^2 = 1 - \frac{1}{4}EM^2 = \frac{3}{4}EM = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Nous utilisons ici une autre propriété des racines carrées :

[[attention]] | -> $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$, avec x positif et y strictement positif. <-

---

A retenir :

- La diagonale d'un carré de côté a vaut $a\sqrt{2}$ - La diagonale d'un cube d'arête a vaut $a\sqrt{3}$ - La hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1 vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$ - La duplication d'un cube à la règle et au compas est impossible

Et si nous allions plus loin encore ?

Le théorème de Pythagore est à la fois très connu mais aussi essentiel dans nombres de domaines que ce soit en mécanique, en géométrie ou en algèbre linéaire. Il fut amélioré par certains savants du moyen-âge mais donna aussi naissance à de nouveaux problèmes qui ne trouveront de solution qu'à l'orée du XXI$me^sicle.Leprsentchapitrevousproposed'allervoircesdiffrentesextensionsduthormedeP$

Norme euclidienne d'un espace à n dimensions

De quoi parle-t-on ?

Nous allons ici chercher à déterminer la norme euclidienne d'un vecteur dans un repère orthonormé. Mais ne fuyez pas, je vais vous expliquer de quoi il s'agit. Un **vecteur**, en géométrie, ce n'est rien de plus qu'une flèche comme ci-dessous :

`![Exemple de vecteur](/media/galleries/483/456c377e-695f-4e60-a310-443da1444f15.png)`

Pour simplifier, on pourrait dire qu'il s'agit d'un segment muni d'un sens. Le vecteur ci-dessus se note $\vec{AB}$ et symbolise un déplacement de A vers B, ce qui n'est pas la même chose que le vecteur $\vec{BA}$ qui représente le déplacement inverse de B vers A. Chercher à calculer sa **norme**, ce n'est rien de plus que de chercher sa longueur AB. Le terme exact est norme **euclidienne**, car il existe des géométries calculant les longueurs de façon très particulière. Ce qui est commode, c'est d'utiliser les vecteurs dans un repère orthonormé. Qu'est-ce qu'un repère orthonormé ? Rien de plus que les axes d'un graphique. Mais attention, il faut que les axes soient perpendiculaires et gradués de la même façon. Exemple :

`![Un vecteur dans un repère orthonormé](/media/galleries/483/848bf02b-6472-433a-b9cf-6e41692cfeff.png)`

Les points A et B peuvent chacun être situés à l'aide de deux nombres appelés **coordonnées** du point. Ainsi, le point A ci-dessus a pour coordonnées (2 ; 4) alors que B a pour coordonnées (6 ; 6). De façon plus générale, ces coordonnées sont notées A(x A ; y A) et B(x B ; y B). De la même manière, un vecteur peut aussi être muni de coordonnées, mais celles-ci ne représentent pas sa position dans le repère mais le déplacement qu'il symbolise. Par exemple, le vecteur $\vec{AB} = \vec{v}$ ci-dessus a pour coordonnées $\binom{4}{2}$, car il se déplace de 4 carreaux vers la droite et de 2 carreaux vers le haut. Le vecteur $\vec{BA}$ aurait eu pour coordonnées $\binom{-4}{-2}$ car il se serait déplacé de 4 carreaux vers la gauche et de 2 carreaux vers le bas. Enfin, la norme du vecteur $\vec{AB} = \vec{v}$ se note $||\vec{AB}|| = ||\vec{v}||$.

Norme euclidienne en dimension 2

Notre but est donc de connaître la longueur de ce vecteur $\vec{AB}$ à partir des coordonnées de A et B. L'astuce consiste à introduire un point H afin de former un triangle rectangle :

`![Introduction d'un point supplémentaire](/media/galleries/483/0d872b32-1f94-4395-9202-501c15c589fc.png)`

On peut alors lire facilement que AH = 4 et BH = 2 (il n'y a pas d'unité ici). En utilisant le théorème de Pythagore on obtient :

AB$^{2\ \&=\ 4}$2 + 2$^{2\ \backslash\ \mathrm{AB}}$2 &= 16 + 4 \ AB^2 &= 20 \ AB &= \sqrt {20}\end{aligned}$$

Ce qui se note également $||\vec{AB}|| = \sqrt{20}$. Maintenant, réfléchissons. D'où vient cette valeur AH=4 ? Nous savions que x_A=2 et x_B=6, donc ce 4 a été obtenu par la soustraction $AH = x_B - x_A = 6 - 2 = 4$. De même, $BH = y_B - y_A = 6 - 4 = 2$. Donc, si $AH = x_B - x_A$ et $BH = y_B - y_A$, alors le théorème de Pythagore nous donne :

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

`![Norme d'un vecteur](/media/galleries/483/3b7d6d6b-f5db-414e-94c8-e64ffac1a717.png)`

Nous avons donc les formules suivantes pour calculer la norme euclidienne d'un vecteur dans un espace à 2 dimensions :

[[attention]] | Si A et B sont deux points de coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ alors on a : | |

$$||\vec{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

| | Autrement dit, si on a un vecteur $\vec{v}\binom{x}{y}$, alors : | |

$$||\vec{v}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

[[information]] | Pour être rigoureux, il faudrait dire que $AH = |x_B - x_A|$ et $BH = |y_B - y_A|$. Mais les valeurs absolues devenant inutiles lors de l'application des carrés et alourdissant l'explication, le choix a été fait de ne pas les mentionner afin de ne pas ajouter des difficultés supplémentaires.

Norme euclidienne en dimension 3

[[question]] | Cette formule peut-elle se généraliser à des espaces de plus grande dimension ?

Pour répondre à cette question, revenons quelques instants sur un exercice précédent : le calcul de la diagonale d'un pavé droit.

`![Un précédent exercice](/media/galleries/483/81081542-e46e-4b3f-bd5d-f5a39c7ef0f7.png)`

Nous avions alors calculé la longueur de la diagonale [AC] à l'aide de la formule $AC^2 = DA^2 + DC^2$, pour ensuite obtenir la longueur AG à l'aide de la formule $AG^2 = AC^2 + CG^2$.

Mais si dans la deuxième égalité, nous remplaçons AC^2 par ce qui est donné dans la première, nous obtenons une sorte de "formule de Pythagore 3D" :

Ce qui peut également se formuler ainsi (en notant d la diagonale du pavé, l sa largeur, L sa longueur et h sa hauteur) :

$$d = \sqrt{l^2 + L^2 + h^2}$$

Gardez cette formule dans un coin de votre tête et revenons à notre problème : calculer la norme d'un vecteur dans un espace à trois dimensions. Voilà pour commencer à quoi cela peut ressembler :

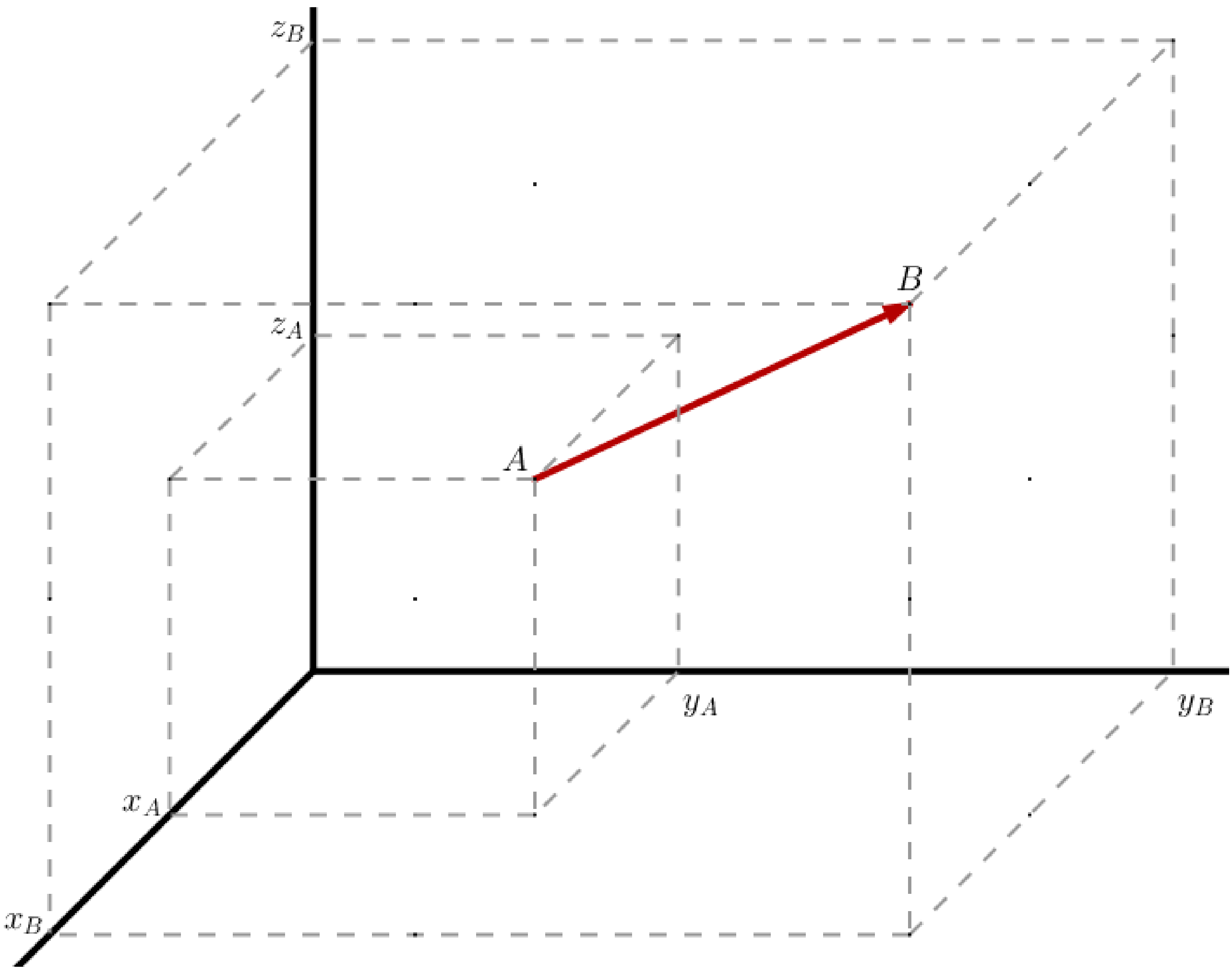


FIGURE 1.21. – Repère orthonormé de dimension 3

Il faut cette fois non plus 2 nombres pour situer un point, mais 3 ! Les coordonnées de A et B sont donc notées $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$. Pour connaître la norme du vecteur $\vec{AB}$, nous allons faire apparaître un pavé droit ayant [AB] comme diagonale :

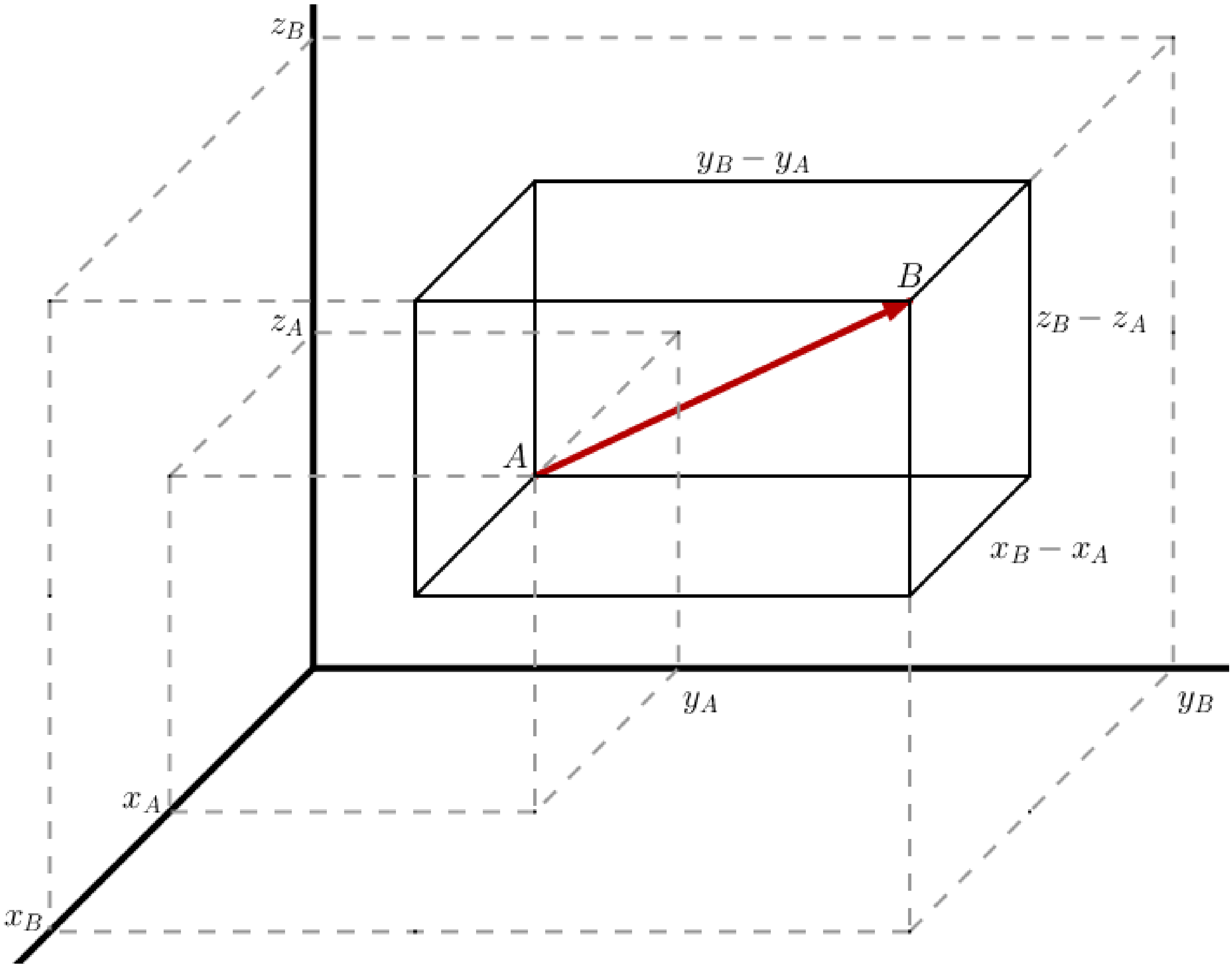


FIGURE 1.22. – Pavé de diagonale [AB]

Pour connaître les dimensions de ce pavé, il suffit d'effectuer les soustractions habituelles : $x_B - x_A$, $y_B - y_A$ et $z_B - z_A$. C'est donc maintenant que nous allons faire appel à notre super formule de Pythagore 3D et y injecter nos soustractions :

$$||\vec{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Nous obtenons donc deux nouvelles formules très proches des formules obtenues précédemment :

[[attention]] | Si A et B sont deux points de coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$ et $(x_B; y_B; z_B)$ alors on a : | |

$$||\vec{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

| | Autrement dit, si on a un vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors : | |

$$||\vec{v}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Norme euclidienne en dimensions 4, 5, 6 ...

Même si cela semble difficile à visualiser, les mathématiciens actuels aiment travailler avec des espaces à 4, 5, 6 voire n dimensions (où n est un nombre potentiellement très grand). Il va devenir compliqué pour moi de réaliser les dessins explicatifs, mais vous devriez pouvoir vous en passer. Commençons par un espace de dimension 4 : vous aurez compris qu'il faudra 4 nombres dans les coordonnées des points et des vecteurs. Oublions nos points A et B, ne gardons que le vecteur $\vec{v}$. Celui-ci aura pour coordonnées :

Vous ne devriez pas avoir de peine à extrapoler la formule permettant de calculer la norme de notre vecteur :

$$||\vec{v}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}$$

Facile non ? On essaye avec 6 dimensions ? C'est parti mais avant cela, nous allons changer nos notations ou sinon nous risquons de nous emmêler les pinceaux dans l'alphabet (et puis ça deviendrait ridicule d'écrire les lettres dans le désordre). Chaque coordonnée sera notée à l'aide de la lettre x à laquelle on adjoindra un numéro en indice. Ainsi, notre vecteur sera :

$$\vec{v} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

Et sa norme sera : $||\vec{v}|| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 + {x_5}^2 + {x_6}^2}$ Mais vous vous apercevez comme moi que cette formule devient longue à écrire, c'est pourquoi les mathématiciens ont inventé un symbole spécifique pour les additions à rallonge. Il s'agit de la lettre grecque *sigma* : $\sum$. Et voici ce que donne notre formule :

$$||\vec{v}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{6} {x_i}^2}$$

Tous les numéros ont été remplacés par la lettre i. On indique au-dessous du symbole $\sum$ la valeur minimale de i (ici 1) et au-dessus sa valeur maximale (ici 6). Il devient alors très facile d'augmenter le nombre de dimensions à 7, 8, 9 ou 1000, puisqu'il suffit de modifier la valeur maximale. Ainsi, pour un espace de dimension n (où n est un nombre entier aussi grand que souhaité), la norme euclidienne d'un vecteur est donnée par la formule :

$$||\vec{v}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}$$

Avouez qu'en voyant cette formule pour la première fois, vous n'auriez jamais pensé qu'il s'agissait en fin de compte du théorème de Pythagore.

1.5. Trigonométrie et théorème d'Al-Kashi

Cette partie va faire appel à des notions de trigonométrie, notamment le sinus, le cosinus et le cercle trigonométrique. Ce cours n'ayant pas vocation à couvrir tous les champs des mathématiques, je vous invite à consulter ce tutoriel si vous n'avez jamais manipuler ces notions.

1.5.1. Valeurs remarquables du cosinus et du sinus

1.5.1.1. Petits rappels

Nous allons déterminer les valeurs du cosinus et du sinus pour des angles de 30°, 45° ou 60°. Pour cela, nous allons avoir besoin du cercle trigonométrique. Sans faire un cours de trigonométrie, rappelons qu'un cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 dont le centre est le centre d'un repère orthonormé. Exemple :

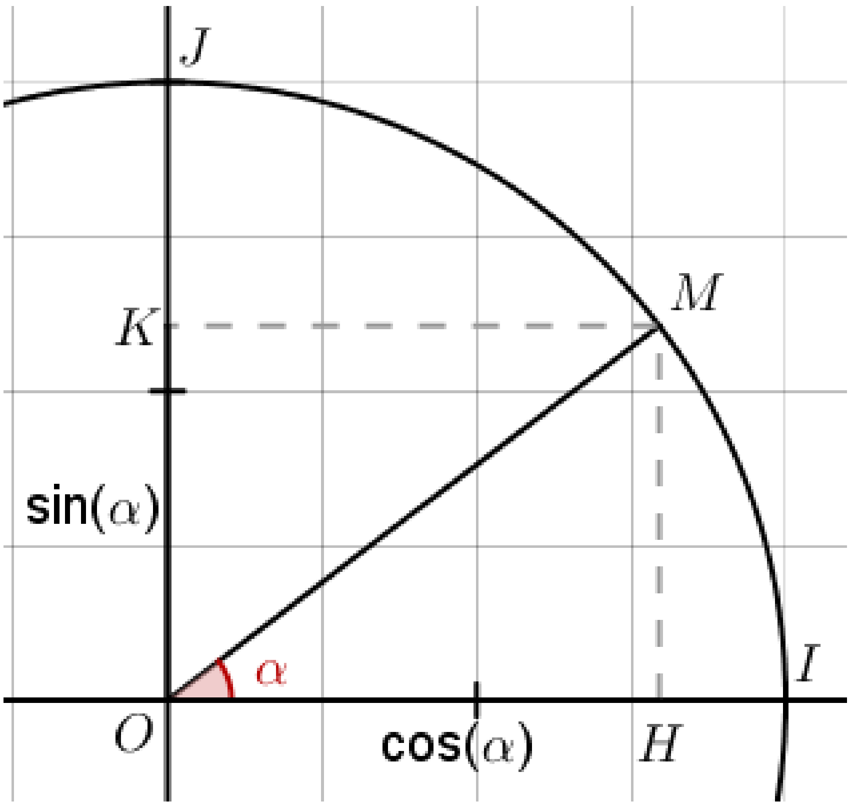


FIGURE 1.23. – Quart de cercle trigonométrique

Sur ce cercle, si on place un point M et que l'on appelle α la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$, alors on peut lire très facilement le cosinus et le sinus de α. Il suffit pour cela de construire les points H et K, projetés orthogonaux de M sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées. On a alors $OH = MK = \cos(\alpha)$ et $HM = OK = \sin(\alpha)$.

On peut dors et déjà appliquer le théorème de Pythagore puisque OMH est rectangle en H :

$$(\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha))^2 = 1^2 \, \color{red}{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1}$$

Cette fameuse formule trigonométrique permet de déterminer le sinus d'un angle connaissant son cosinus et réciproquement. Mais venons-en à des cas particuliers. Et tout d'abord, que valent le sinus et le cosinus d'un angle de 45 ° ?

L'angle de 45°

! [Avec un angle de 45°](/media/galleries/483/ada0630d-4f6f-4021-9c1b-f0a2960be579.png)

Si nous considérons un angle α de 45°, on constate rapidement que le triangle OHM est non seulement rectangle mais également isocèle. De là se dégagent deux conclusions assez évidentes :

- Le rectangle OHMK est en réalité un carré - $OH = OK$ donc $\cos(45°) = \sin(45°)$

La plus intéressante est la première car nous avons établi une formule au chapitre précédent : les diagonales des carrés de côté a mesurent $a\sqrt{2}$! Et nous savons que la diagonale [OM] mesure 1 puisque c'est également un rayon du cercle trigonométrique. Nous aboutissons ainsi à l'équation : $a\sqrt{2} = 1$. Ne reste plus qu'à la résoudre pour trouver la longueur du côté a :

a \sqrt 2 \color{purple} \times \sqrt 2 &= 1 \color{purple} \times \sqrt 2 \ a \times 2 &= \sqrt 2 \ a &= {\sqrt 2 \over 2}\end{aligned}$$

Nous avons ainsi trouver une première valeur remarquable : $\color{red}{\cos(45°) = \sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}}$. Passons maintenant aux angles de 60° et 30°.

1.5.1.2. Les angles de 30° et 60°

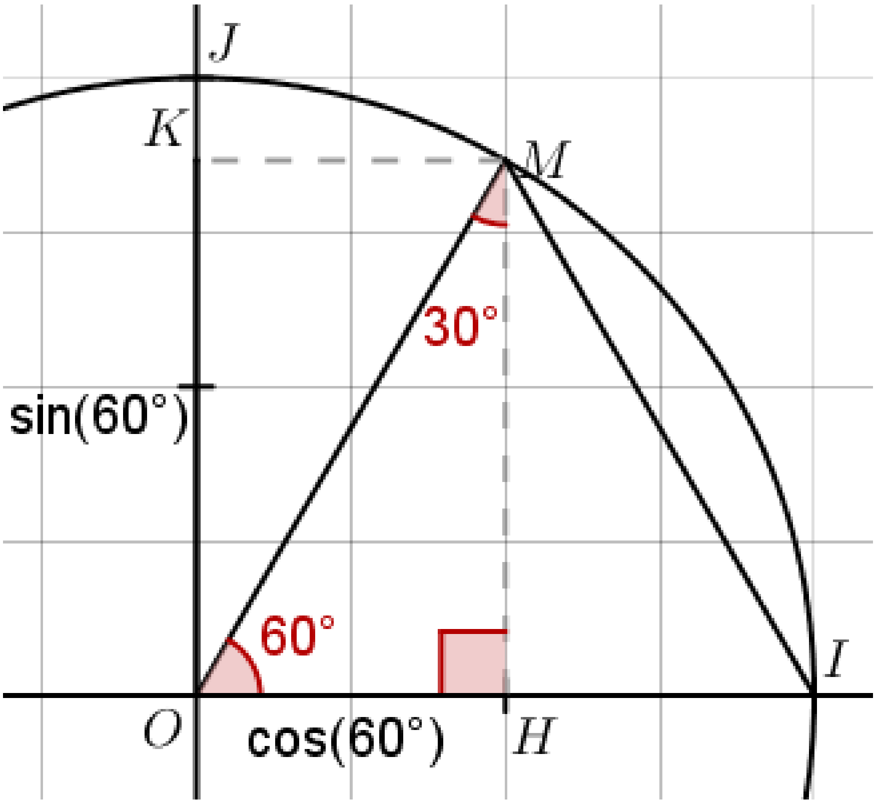


FIGURE 1.24. – Avec un angle de 60°

Si nous considérons un angle α de 60° tout d'abord (le cas 30° étant symétrique), on constate que l'on obtient un triangle OMI équilatéral. En effet, $OI = OM$ donc le triangle OMI est toujours isocèle. Mais comme les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux, $\widehat{OMI} = \widehat{OIM} = \frac{180-60}{2} = 60°$. Là encore, deux conclusions s'imposent :

- H est le milieu de [OI] donc $OH = \frac{OI}{2} = \frac{1}{2}$;
- d'après le chapitre précédent, la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1 mesure $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le théorème de Pythagore nous a ainsi permis de dire que $\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos(60°) = \frac{1}{2}$. Si nous faisions la figure pour un angle de 30°, nous constaterions cette fois que OMJ serait équilatéral et donc, par symétrie, que $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(30°) = \frac{1}{2}$.

1.5.2. Généralisation du Théorème de Pythagore

1.5.2.1. Le théorème

Le théorème de Pythagore est très utile, nous l'avons vu. Mais il a une limite importante : il faut absolument un angle de 90° dans le triangle où l'on souhaite l'appliquer. Heureusement, le théorème de Pythagore a connu des améliorations, sous l'Antiquité tout d'abord puis au Moyen-Âge. C'est ainsi que fut formulée le **théorème de Pythagore généralisé**, aussi appelé **Loi des cosinus** ou **théorème d'Al-Kashi**, en l'honneur d'un important mathématicien persan du XIV$^{\text{ème}}$-XV$^{\text{ème}}$ siècle.

Figure 1.25. – Ghiyath ad-Din Jamshid Mas'ud al-Kashi

Pour utiliser le théorème d'Al-Kashi, il faut disposer des longueurs de deux côtés d'un triangle ainsi que de la mesure de l'angle situé entre ces deux côtés. Ce théorème permet de déterminer la longueur du troisième côté du triangle ou, inversement, si l'on connaît les trois côtés du triangle, de déterminer ses angles. Prenons un triangle ABC dans lequel on cherche la longueur CB, le théorème de Pythagore généralisé donne la relation suivante :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

Dans un triangle rectangle, la fin de cette formule ($-2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$) n'apparaît pas car le cosinus d'un angle droit vaut 0.

1.5.2.2. Un exemple

Voyons maintenant ce que donne ce théorème dans le triangle ci-dessous :

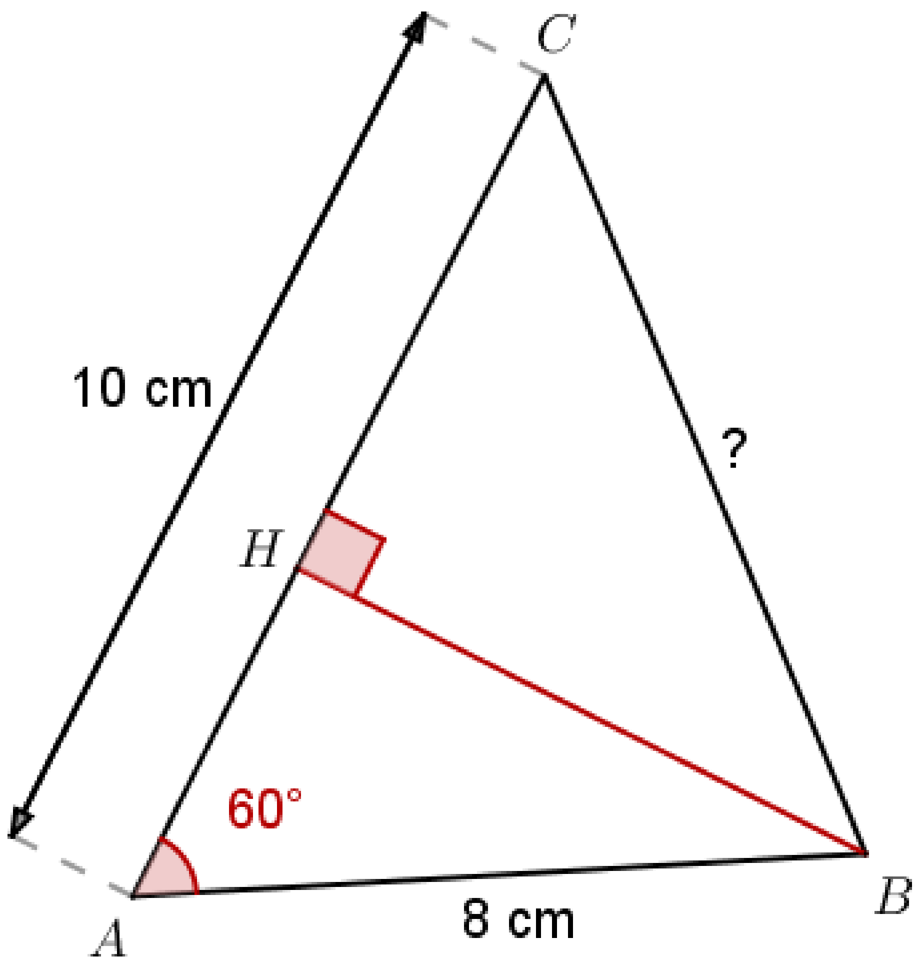


Figure 1.26. – Triangle quelconque

Il suffit, pour commencer, de remplacer chaque longueur par sa mesure :

$$BC^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \times 8 \times 10 \times \cos(60°)$$

Or nous avons vu que le cosinus d'un angle de 60° vaut 0,5. Il suffit donc désormais de calculer cette expression :

BC2 &= \underbrace{64 + 100} - \underbrace{2 \times 8} \times \underbrace{10 \times 0,5}\ BC2 &= 164 - \underbrace{16 \times 5}\ BC2 &= 164 - 80\ BC2 &= 84\ BC &= \sqrt {84} \approx 9,165 cm\end{aligned}$$

1.5.2.3. Une démonstration

Voyons maintenant comment parvenir à cette formule. Vous aurez remarqué que, dans la figure précédente, j'avais fait apparaître la hauteur [BH]. La raison est simple : il s'agit de faire apparaître des triangles rectangles pour pouvoir utiliser à la fois le théorème de Pythagore classique et les formules de trigonométrie. Ainsi, le théorème de Pythagore nous permet de calculer CB dans le triangle CBH : $CB^2 = CH^2 + HB^2$. Problème, nous ne connaissons pas la hauteur BH (entre autres). Mais celle-ci peut se calculer (toujours avec notre ami Pythagore) dans le triangle AHB : $HB^2 = AB^2 - AH^2$. En injectant cette deuxième formule dans la première, on obtient donc :

$$CB^2 = CH^2 + AB^2 - AH^2$$

Mais nous sommes toujours face à un problème : nous ne savons pas où se situe le point H. C'est là qu'interviennent nos formules trigonométriques. Nous connaissons l'angle $\widehat{BAC}$ donc nous allons utiliser son cosinus : $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AH}{AB}$. Ce qui peut également s'écrire $AH = AB\cos(\widehat{BAC})$. Nous avons une formule pour AH, reste à en trouver une pour CH. Ce n'est pas le plus compliqué : $CH = AC - \underline{AH} = AC - AB\cos(\widehat{BAC})$.

Pour les triangles obtusangles, c'est à dire ceux ayant un angle aigu, la hauteur "sort" du triangle. On a alors : $CH = AH - AC$. Cette différence n'ayant pas d'impact sur le reste de la démonstration, nous allons la négliger.

Enfin, nous allons réutiliser la formule rouge dans laquelle nous remplacerons AH et CH par les deux formules violettes précédentes.

$$= \underbrace{(AC - AB\cos(\widehat{BAC}))^2} + AB^2 - (AB\cos(\widehat{BAC}))^2$$

Vous aurez remarqué que l'un des carrés, celui souligné d'une accolade, est devenu un peu compliqué. Nous allons donc développer son écriture à l'aide de l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

&= AC2 - 2 AC \times AB \cos(\widehat{BAC}) + AB2\end{aligned}$$

Après développement, les termes $AB\cos(\widehat{BAC})$ se suppriment et nous obtenons enfin la formule tant recherchée, celle du Théorème de Pythagore généralisé.

1.6. Triplets pythagoriciens et dernier théorème de Fermat

1.6.1. Sur les triplets pythagoriciens

1.6.1.1. Des triplets en pagaille

Nous avons déjà vu ce qu'était un triplet pythagoricien et j'espère que vous aurez retenu le fameux triplet (3 ;4 ;5). Mais peut-être avez-vous remarqué au cours des précédents exemples que j'ai utilisé d'autres triplets ? Ainsi, lors du calcul de la diagonale d'un rectangle j'avais utilisé le triplet (8 ;15 ;17) et pour la diagonale du pavé ou la hauteur du triangle isocèle c'était le triplet (5 ;12 ;13) qui avait eu ma préférence.

$$8^2 + 15^2 = 17^2 5^2 + 12^2 = 13^2$$

[[question]] | Combien existe-t-il de triplets pythagoriciens ?

La réponse est simple : une infinité. Prenons par exemple le triplet pythagoricien (3 ;4 ;5). Si l'on multiplie chaque nombre par 4 on obtient un nouveau triplet (12 ;16 ;20) lui aussi pythagoricien :

En multipliant par 2, 3, 5, 6 ou 7515, nous aurions pu imaginer autant de nouveaux triplets que souhaité. Ainsi, les triplets (6 ;8 ;10), (9 ;12 ;15), (12 ;16 ;20), (15 ;20 ;25) ... sont tous pythagoriciens car ce ne sont rien de plus que des ersatz du triplet originel (3 ;4 ;5). Pour s'en convaincre, il suffit de prendre un triplet (x ;y ;z) pythagoricien, ce qui signifie que $x^2 + y^2 = z^2$. Si l'on multiplie chacun des nombres par un nombre entier k, on obtient ainsi un nouveau triplet (kx ;ky ;kz) et on remarque alors que :

$$= k^2(x^2 + y^2) = k^2 z^2 = (kz)^2$$

Autrement dit, le nouveau triplet vérifie l'équation $(kx)^2 + (ky)^2 = (kz)^2$, il est lui-aussi pythagoricien. Mais on peut restreindre le nombre de triplets aux cas les plus simples, c'est-à-dire qui ne sont pas tous multiples d'un même nombre. On dit alors que les trois nombres composant le triplet sont **premiers entre eux** et que le triplet est **primitif**.

Déterminer les triplets primitifs

[[question]] | Alors combien existe-t-il de triplets pythagoriciens primitifs ?

Eh bien toujours une infinité, malheureusement. Mais il y a toutefois un point positif : il est potentiellement possible de déterminer tous les triplets pythagoriciens primitifs (si l'on a l'éternité devant soi bien sûr). Plus précisément, si l'on a deux nombres a et b premiers entre eux (qui n'ont pas de diviseur commun hormis 1) et de parités différentes, alors il est possible de générer un triplet pythagoricien primitif $(x; y; z)$ en calculant :

x &= a$^{2 - b}$2\ y &= 2ab\ z &= a$^{2 + b}$2 \end{aligned} \right.$$

On peut en effet vérifier d'une part que : $z^2 = (a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4$ et d'autre part que :

$$= a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = z^2$$

Mieux encore ! Tout triplet pythagoricien peut s'écrire sous cette forme. Mais la démonstration complète exigeant une certaine technicité en arithmétique (ce qui n'est pas notre sujet principal), elle ne sera pas présentée ici.

Des triplets, des quadruplets ; des carrés, des cubes ...

Quelques équations diophantiennes

On appelle **équation diophantienne** toute équation dont les coefficients et les solutions sont des nombres entiers ou fractionnaires, en l'honneur du mathématicien grec (quoique citoyen romain) Diophante d'Alexandrie. La relation de Pythagore $x^2 + y^2 = z^2$ est la plus célèbre d'entre elles mais elle a donné bien des idées à de nombreux autres mathématiciens.

Voici un exemple simple d'équation diophantienne élargissant le théorème de Pythagore : $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$. Cette équation diophantienne admet elle-aussi une infinité de solution. Par exemple $2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$ ou encore $2^2 + 7^2 + 26^2 = 27^2$. Je vous laisse chercher d'autres solutions, c'est un jeu amusant et pas si compliqué (pour s'aider on pourra faire la liste des 10 premiers carrés et chercher l'opération permettant de passer d'un carré au suivant).

Il est possible d'obtenir d'autres équations diophantiennes en augmentant non plus le nombre de termes mais également les exposants, par exemple : $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$. Concernant cette équation, une anecdote raconte qu'un jour le grand mathématicien français Augustin Louis Cauchy reçut un manuscrit démontrant qu'elle n'admettait aucune solution. Cauchy prit alors sa plume et répondit simplement à son auteur : "$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$". En effet :

&= 216\ &= 6^3\end{aligned}$$

1.6.1.2. Le dernier théorème de Fermat

Si toutes les équations diophantiennes ne sont pas issues de l'égalité de Pythagore, il est en une, célébrissime, qui en est la très digne héritière. Je m'en vais vous conter son histoire. Diophante d'Alexandrie, dont nous avons déjà parlé, avait écrit une œuvre célèbre appelée *les Arithmétiques* et contenant 13 livres. Celui-ci n'était pas à proprement parler un traité de mathématiques, mais plutôt un recueil d'exercices contenant des solutions ingénieuses et souvent généralisables à des problèmes de même type. On y trouve par exemple le problème n°8 : "Diviser un nombre carré en une somme de deux carrés" ; autrement dit, "Trouver un triplet pythagoricien".

Mais à la chute de l'Empire romain, l'œuvre fut perdue par les européens et ne fut conservée que par les peuples orientaux (Byzantins, Arabes ou Persans). Elle ne refit son apparition dans nos contrées qu'au XV^ème^ siècle et mit de nombreuses décennies à être traduite du Grec et de l'Arabe vers le Latin, le Français, l'Anglais ... d'ailleurs, sur les 13 livres écrits par Diophante, seuls 10 ont survécu au passage du temps.

L'arithmétique n'en demeura pas moins une branche mineure des mathématiques, jusqu'à ce qu'au XVII^ème^ siècle, un magistrat français, passionné de Math, ne se plonge dans la lecture de cet ouvrage. Ce magistrat s'appelait Pierre Fermat et fut surnommé le "Prince des amateurs" pour son immense talent. Alors qu'il lisait et annotait *les Arithmétiques* de Diophante, Fermat en vint au problème n°8. Il en trouva bien entendu la solution et ajouta dans la marge les mots suivants :

"*Un cube n'est jamais la somme de deux cubes, une puissance quatrième n'est jamais la somme de deux puissances quatrièmes ... J'ai découvert une merveilleuse démonstration, mais la marge est trop étroite pour la contenir.* "

En termes actuelles, Fermat écrit que les équations diophantiennes du type $x^n + y^n = z^n$ n'ont aucune solution lorsque $n > 2$. Cette affirmation constitue ce que l'on appelle le **dernier théorème de Fermat**. La méthode que Fermat affirme dans ses écrits avoir trouvée semble être sa fameuse méthode de la **descente infinie** : il montre que si un tel triplet (x ;y ;z) existe, alors il peut trouver un triplet strictement plus petit vérifiant lui-aussi l'équation, donc il peut trouver un autre triplet strictement plus petit vérifiant l'équation, donc il peut trouver un autre triplet strictement plus petit vérifiant l'équation, donc il peut trouver un autre triplet strictement plus petit vérifiant l'équation, ... or avec les nombres entiers, il n'est pas possible de trouver infiniment des nombres plus petits. C'est ainsi que Fermat aurait prouver son théorème pour les cas $n = 3$ et $n = 4$.

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/

Figure 1.27. – Pierre de FERMAT

Malheureusement, cette méthode ne marche plus à partir du rang $n = 5$. Alors Fermat a-t-il vendu la peau de l'ours avant de l'avoir tué ? Ou avait-il vraiment trouvé une "merveilleuse démonstration" ? Une chose est sûre : trois siècles plus tard, le dernier théorème résistait encore aux plus grands esprits des mathématiques. Des génies comme Euler, Dirichlet, Legendre ou Sophie Germain s'y étaient frottés avec plus ou moins de succès. Le théorème avait pu être démontré pour quelques exposants particuliers ou pour des groupes d'exposants, mais toujours pas pour tous les exposants.

Il fallut attendre 1993 pour qu'un mathématicien anglais (un peu fou) du nom de Andrew Wiles démontre le vieux théorème, après sept ans d'un travail acharné. Et encore ! Une erreur fut trouvée dans sa démonstration de plusieurs centaines de pages. Il fallut donc encore une année de labeur et de déprime au pauvre Wiles pour parvenir à une preuve irréfutable, mettant un terme à une quête vieille de plus de 350 ans.

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/

Figure 1.28. – Andrew John WILES

1.7. A retenir :

— Dans un repère orthonormé, la norme d'un vecteur ou la longueur d'un segment se calcule à l'aide du théorème de Pythagore

— Le théorème de Pythagore amélioré ou théorème d'Al-Kashi peut s'appliquer dans n'importe quel type de triangle
— $cos(45°) = sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
— $cos(30°) = sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
— Il n'existe plus de triplets (x, y, z) vérifiant $x^n + y^n = z^n$ au delà de $n = 2$.

Contenu masqué

Contenu masqué n°1

$$\sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{81} = 9$$

$$\sqrt{144} = 12$$

$$\sqrt{225} = 15$$

Retourner au texte.

Deuxième partie

Aspect historique

Pythagore, Pythagore ... tout le monde connaît ce nom, parfois même avant d'avoir découvert son théorème, et pourtant qui connaît son histoire ? Bien peu de monde en fait. Les siècles ont passé et l'on oublie souvent de parler de l'homme lorsque l'on aborde son œuvre. Et pourtant, Pythagore est assez éloigné de l'idée que l'on se fait généralement du savant grec, vieux, sage, frêle, portant une grande barbe blanche, plongé dans ses méditations et ses calculs, ayant subitement une révélation et sortant nu dans la rue comme le fit Archimède. Première surprise, et non des moindres, **Pythagore n'a jamais découvert son propre théorème**. Et ce ne sera pas la seule surprise de cette partie. Je vous invite donc à partir sur les traces de Pythagore, de son théorème et de ses découvertes.

2. Un théorème plus ancien que Pythagore

?

Pythagore n'a jamais découvert son propre théorème ! Ce serait un usurpateur ? Mais alors qui est le véritable inventeur du théorème qui porte son nom ?

Pour être honnête avec vous, nous ne connaissons pas le découvreur du théorème de Pythagore, pour une raison bien simple : il s'agit d'une propriété connue depuis des millénaires. Nous savons par exemple que les Babyloniens la connaissaient un millénaire avant la naissance de Pythagore. Les babyloniens, vous connaissez ? Non ? Et si je vous parle de Babel et de sa tour, ça vous dit quelque chose ? Eh bien, Babel n'est rien de plus que le nom hébraïque d'une très ancienne et très puissante cité connue sous le nom de Babylone. Nous allons d'ailleurs y faire une petite escale avant de retrouver Pythagore et la Grèce.

2.1. La mythique Babylone

2.1.1. La civilisation babylonienne

La cité de Babylone aurait été fondée au cours du III$^{\text{ème}}$ millénaire avant Jésus Christ aux environs de l'actuelle Bagdad, en Mésopotamie (grosso modo l'Iraq actuel). Pour vous donner un ordre d'idée, à cette période l'Égypte construit la grande pyramide de Kheops et les Grecs en sont encore à l'âge du bronze et essayent de coloniser le pays (bref, ils sont plus proches des Pierrafeu que d'Aristote). Babylone, bien que construite tardivement au beau milieu d'une région déjà très urbanisée et développée pour l'époque, va prendre un essor inattendu et devenir rapidement la première puissance régionale. Après des hauts et des bas, Babylone formera même au VII$^{\text{ème}}$ siècle av.JC. un empire s'étendant sur tout le moyen-orient :

FIGURE 2.1. – Carte approximative de l'empire babylonien à son apogée

Si la civilisation babylonienne est moins bien connue du grand public que la civilisation égyptienne, il ne faut pas pour autant la dénigrer. Ses prouesses architecturales ou scientifiques n'ont rien à envier au pays du Nil. Côté architecture, Babylone hébergeait l'une des sept merveilles du monde antique : les **jardins suspendus** (aujourd'hui disparus) ; ses gigantesques murailles ainsi que ses portes monumentales (comme la **porte d'Ishtar**) étaient connues des grecs eux-mêmes ; enfin, les civilisations mésopotamiennes étaient réputées pour leurs **ziggurat**, d'immenses temples rappelant les pyramides égyptiennes. D'ailleurs, la ziggurat de Babylone a marqué les mémoires puisque c'est elle que la Bible nomme **Tour de Babel**.

Babylone est également connue pour la production d'un des premiers et plus célèbres codes de loi : le code de Hammurabi. Mais, pour ce qui nous concerne, Babylone devint surtout un grand centre scientifique. Si vous en doutez, sachez que les Babyloniens comptaient en base 60, c'est à dire avec 60 chiffres quand nous n'en avons que 10 (enfin presque, il n'en avaient que 59 puisqu'il leur manquait le zéro). Et que c'est à cause de cette tradition que nous comptons 60 secondes dans une minute, 3600 dans une heure ou deux fois 12 heures dans une journée. C'est également aux Babyloniens que nous devons nos degrés pour mesurer les angles : en bons astronomes, ils partagèrent la voûte céleste en 6 secteurs de 60° chacun, d'où $6 \times 60 = 360°$, comme les 360 jours de l'année (presque, c'était 365,25 mais ce n'était pas si mal pour l'époque). D'où notre habitude de mesurer des angles droits de 90°, des angles plats de 180° et des angles pleins de 360°. Férus d'astrologie, ils étudièrent le ciel comme peu de civilisations ne le firent. Ils constatèrent le caractère cyclique de nombreux phénomènes astronomiques et développèrent ce que l'on nomme aujourd'hui la trigonométrie, le cosinus, le sinus ...

2.1.2. La tablette Plimton 322

De nombreuses tablettes d'argile attestent de ces connaissances poussées sur les mesures du triangle (ce que l'on nomme la trigonométrie). Mais une en particulier va retenir notre attention, une tablette répondant au doux nom de Plimpton 322.

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/

Figure 2.2. – La Tablette Plimpton 322

Cette tablette, aujourd'hui conservée à l'université de Columbia, daterait de -1800. Elle est incomplète mais comporte suffisamment d'informations pour vous faire douter de Monsieur Pythagore. Elle comporte des listes de nombres présentés par lignes, à la façon d'un manuel de mathématiques présentant des listes d'exercices types. Et parmi ces nombres, on découvre notamment des triplets pythagoriciens. Mais attention ! Il ne s'agit pas de triplet du genre 3/4/5 ou 6/8/10, non ! Ces triplets sont bien plus compliqués : le premier d'entre eux est 119, 120, 169 ! Vérifions ensemble :

$$119^2 + 120^2 = 14161 + 14400 = 28561$$
$$169^2 = 28561$$

La réciproque du théorème de Pythagore est vérifiée : ces longueurs donnent bien un triangle rectangle. Et si le calcul du carré de 169 ne vous a pas découragé, voici un second triplet de la tablette : 4961, 6480, 8161 ! Ce simple exemple nous montre que les Babyloniens avaient une parfaite connaissance de l'égalité de Pythagore et, de plus, qu'ils disposaient d'algorithmes efficaces pour calculer les racines carrées. Pour les plus curieux et les plus chevronnés, je vous présente dans la bannière cachée la méthode dite babylonienne permettant d'extraire une racine carrée.

Contenu masqué n°2

Revenons à notre tablette Plimpton 322. Elle prouve que les Babyloniens avaient une grande maîtrise de la formule de Pythagore, mais ce n'est pas tout. Si l'on considère la colonne de gauche, on voit apparaître des nombres bien plus longs. Ces nombres donne la valeur de l'opération suivante :

$$\left(\frac{hypotnuse}{cathte}\right)^2$$

La division $\frac{hypotnuse}{cathte}$ donne ce que l'on appelle aujourd'hui la sécante ou la cosécante des angles du triangle rectangle, c'est à dire l'inverse du cosinus ou du sinus de l'angle. Si vous ne connaissez pas encore le cosinus ou le sinus, sachez qu'il s'agit d'un outil géométrique particulièrement complexe et puissant qui a en plus l'avantage d'avoir des valeurs qui ne tombent presque jamais juste.

2.2. Pendant ce temps en Égypte

2.2.1. Le papyrus Rhind

Il ne fait donc aucun doute que le théorème de Pythagore était connu des Babyloniens presque 2000 ans avant notre ère, mais surtout plus de 1000 ans avant Pythagore lui-même. Mais qu'en était-il des Égyptiens (je ne vous présente bien entendu pas cette brillante et célèbre civilisation) ? Eh bien, côté Égyptien c'est le flou. En fait, on est quasiment certain que le théorème était connu et maîtrisé mais il n'existe pas pour l'heure de preuve flagrante. Il existe bien des papyrus de Mathématiques comme le papyrus Rhind ou le papyrus de Moscou qui présentent des calculs de longueur, d'aire ou de volume particulièrement complexes. On y trouve le théorème de Thalès, mais pas celui de Pythagore.

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/

Figure 2.3. – Papyrus Rhind

?

Mais alors qu'est-ce qui nous faire croire que les Égyptiens maîtrisaient le théorème de Pythagore ?

Pour plusieurs raisons. Tout d'abord, le papyrus Rhind traite régulièrement des problèmes de pente de pyramide. La pente d'un triangle rectangle indique l'inclinaison de son hypoténuse et n'est autre que la tangente d'un des angles aigus du triangle ou, plus simplement, la division d'une des cathètes par la seconde. Par exemple, pour un triangle 3/4/5, la pente correspond à la fraction $\frac{4}{3}$ ou à la fraction $\frac{3}{4}$ (cela dépend de l'orientation du triangle). Or, c'est cette même pente qui est utilisée la plupart du temps dans le papyrus. Jamais le théorème de Pythagore n'est utilisé en tant que tel, mais le triplet pythagoricien 3/4/5 est utilisé presque partout sans jamais le dire. D'ailleurs, certaines pyramides sont construites dans des proportions très proches du triplet 3/4/5. C'est pourquoi ce fameux triplet est parfois appelé triangle égyptien.

2.2.2. Le don du Nil

Une autre raison tient à la nature même de l'Égypte. Il s'agit avant tout d'un pays agricole vivant au rythme du Nil. Tous les ans le grand fleuve sort de son lit et recouvre les champs, les fertilisant de ses alluvions. Problème : une fois la décrue amorcée, comment savoir où se situaient les canaux et les limites de parcelles ? Le pouvoir de délimiter les parcelles au nom du pharaon était attribué à des géomètres ou arpenteurs. Ces derniers se retrouvaient inévitablement dans la même situation que le maçon de l'exemple précédent : comment réaliser une figure géométrique de base comme la droite, le cercle ou l'angle droit pour partager les terres ? (Ceux qui répondent " *avec un télémètre laser* " ont du manquer une étape).

La réponse est bien plus simple qu'il n'y paraît : à l'aide d'une corde ! Pour tracer une droite, il suffira de la tendre. Pour tracer un cercle ou juste un arc de cercle, il suffira de fixer une extrémité de la corde à un piquet et de se déplacer en conservant la corde tendue. C'est ainsi que les anciens ont imaginer mille et une construction "à la règle non graduée et au compas" pour obtenir des milieux, des triangles, des bissectrices ... Quant à l'angle droit, il suffit de reprendre à nouveau le triangle égyptien 3/4/5. Pour cela, l'arpenteur réalisait un nœuds à l'une des extrémités de la corde puis un second un peu plus loin. Ensuite, il reportait la distance entre les deux nœuds tout le long de la corde afin d'obtenir 13 nœuds en tout. Pourquoi 13 nœuds ? Eh bien car entre 13 nœuds, on compte 12 intervalles et que $3 + 4 + 5 = 12$! Il devenait donc possible de réaliser le fameux triangle égyptien et ainsi de construire un angle droit en reliant entre eux le premier et le dernier noeuds.

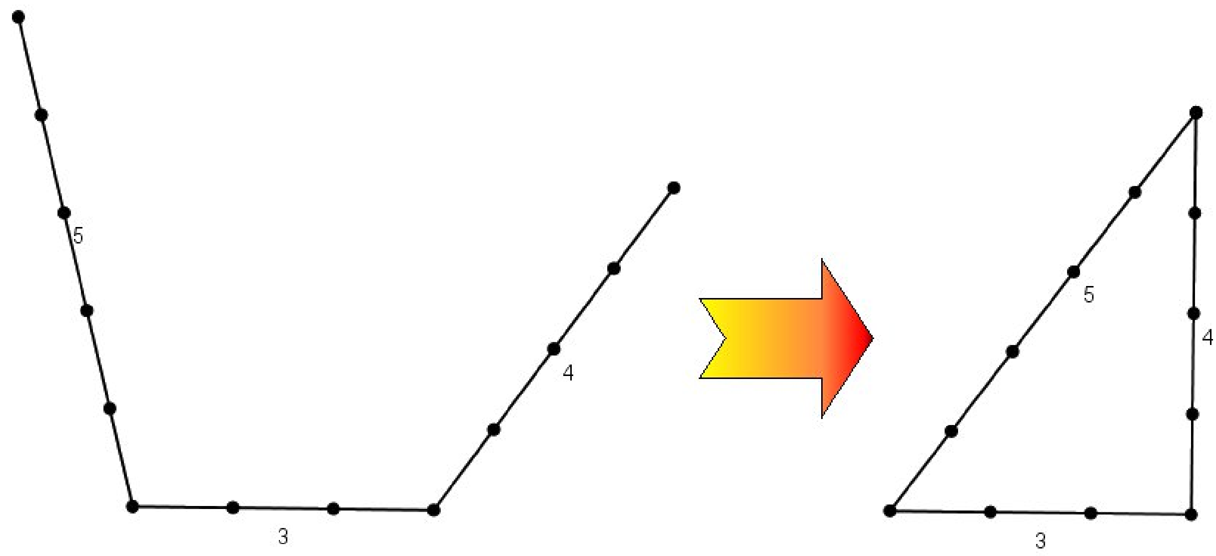


FIGURE 2.4. – Principe de la corde à 13 nœuds

Cette technique, rudimentaire mais efficace sera utilisée pendant des millénaires.

###A retenir

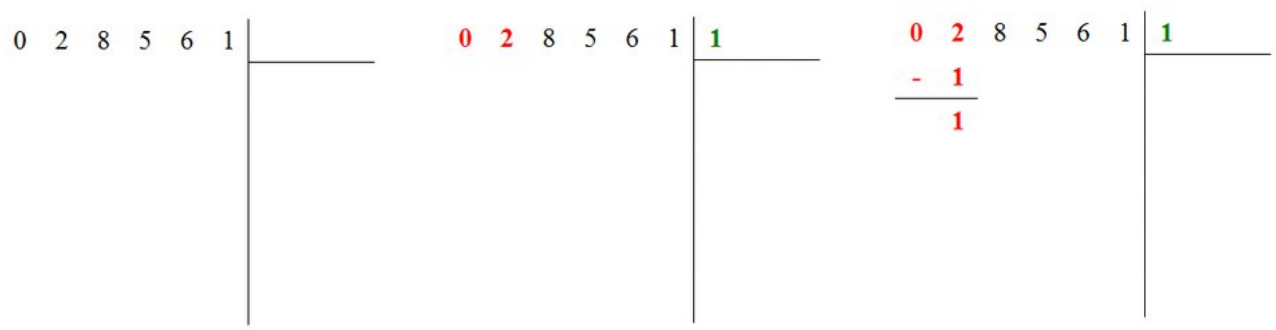
- Le théorème de Pythagore est une **très ancienne** propriété géométrique apparue plus d'un millénaire avant Pythagore lui-même.
- Les Grecs n'ont pas inventé les Mathématiques : la plupart de leurs connaissances sont issues **d'Égypte et de Mésopotamie**.
- Le triangle égyptien de longueurs 3/4/5 est un triangle rectangle

Contenu masqué

Contenu masqué n°2

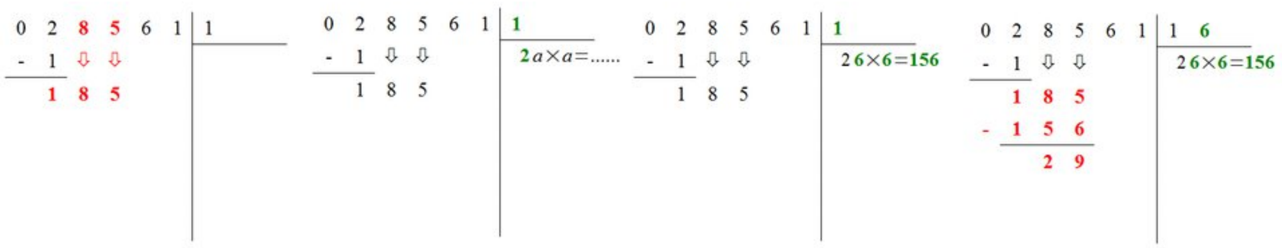
> Ce qui suit exige une certaine technicité et une bonne dose de calcul mental.

Vous vous êtes peut-être déjà demandé comment extraire une racine carrée à la main ? Eh bien c'est faisable grâce à la méthode babylonienne que je vais dérouler ici avec le nombre 28 561 dont nous avons vu que la racine carrée était 169. Tout d'abord, on pose le calcul de racine à la manière d'une division, avec une potence (voir ci-dessous). Écrivons le nombre 28 561 en haut à gauche en prenant soin d'ajouter un zéro devant pour avoir un nombre pair de chiffres. On sélectionne ensuite les deux premiers chiffres (ici 02) et on cherche le nombre dont le carré est le plus proche de 2 tout en lui étant inférieur ou égal. Ici, c'est 1 car $1^2 = 1$ alors que $2^2 = 4 > 2$. On écrit donc 1 en haut à droite et le résultat de 1^2 en dessous de 2 et on effectue la soustraction $2 - 1 = 1$:

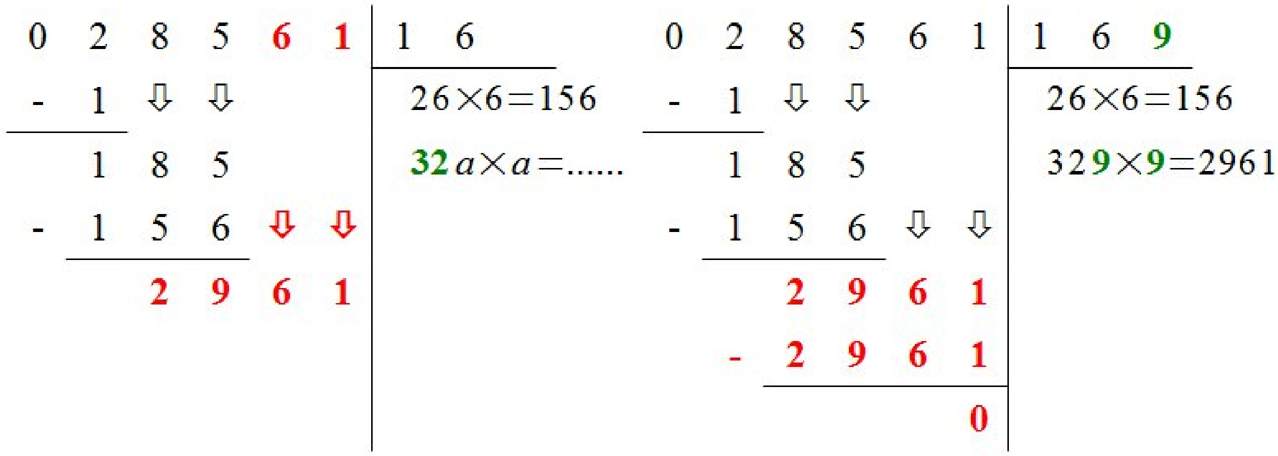


Jusque là, pas de problème. Ça ressemble beaucoup à la division. C'est maintenant que tout se complique. Abaissons deux chiffres supplémentaires : on obtient 185. Et là, il ne faut pas chercher un carré proche de 185, ce serait trop simple. Il faut revenir à notre résultat précédent (le 1) et le multiplier par 2. On écrit le résultat en dessous (partie en bas à droite) et on cherche un chiffre a tel que $2a \times a$ soit le plus proche possible de 185 tout en lui restant inférieur ou égal.

Par exemple, $25 \times 5 = 125$ est inférieur à 185, mais on doit pouvoir trouver mieux. $27 \times 7 = 189$ est plus grand que 185, le nombre cherché est donc 6 car $26 \times 6 = 156$. On écrit donc 6 en haut à droite et on effectue la soustraction $185 - 156 = 29$.



Ardu n'est-ce pas ? Si vous avez compris, l'étape suivante sera identique : on abaisse deux chiffres à gauche pour obtenir 2961, à droite on double le résultat pour obtenir $16 \times 2 = 32$ et on cherche à nouveau un chiffre a tel que $32a \times a$ soit le plus proche de 2961 tout en lui étant inférieur ou égal. Ce chiffre est 9 car $329 \times 9 = 2961$. On place 9 en haut à droite et on effectue la soustraction $2961 - 2961 = 0$. Opération terminée : $\sqrt{28561} = 169$.



Retourner au texte.

3. Pythagore de Samos, mythe ou réalité ?

Vous savez désormais que le fameux théorème de Pythagore n'est pas du à Pythagore, mais fut découvert bien longtemps avant lui en Mésopotamie et en Égypte. Une question se pose alors :

?

Pourquoi ne parle-t-on pas de "théorème babylonien" ou de "théorème du triangle rectangle" ? Que vient faire Pythagore dans cette histoire ?

Nous allons donc nous intéresser dans ce chapitre à celui qui a donné son nom à la propriété que nous étudions, ainsi qu'à l'école qu'il fondera à la fin de sa vie.

3.1. L'histoire fantastique de Pythagore

Comme je vous l'ai déjà dit, Pythagore n'a jamais découvert le théorème portant son nom puisqu'il était connu depuis des siècles. Toutefois, jusqu'à l'arrivée des philosophes grecs (et notamment de Thalès), jamais les mathématiciens ne s'étaient préoccupés de prouver leurs affirmations. D'ailleurs bien souvent, ils n'élaboraient pas de propriétés générales comme nous en avons aujourd'hui l'habitude mais des cas particuliers qu'ils se contentaient de vérifier par la pratique. Bref, il y avait encore une bonne part de pifométrie malgré les nombreuses avancées effectuées.

Thalès fut le premier à exiger que les propriétés mathématiques puissent s'appliquer à des figures générales et qu'elles soient démontrées. Au lieu de dire : " *Quand je trace un carré de côté 4m, les diagonales ont l'air de se couper en leur milieu* ", on dira désormais : " *Dans tous les carrés, les diagonales se coupent en leur milieu et je peux l'expliquer de façon rationnelle* ". Perpétuant cette exigence, Pythagore fut ainsi **le premier**, non pas à découvrir, mais **à prouver** le célèbre théorème.

Enfin ... je devrais plutôt dire que Pythagore **aurait** été le premier à prouver le célèbre théorème. Car malheureusement pour nous, il n'a laissé aucun écrit de sa main et la première démonstration dont nous disposons est celle d'Euclide que nous avons découverte dans une précédente partie. C'est bien là le problème avec l'illustre mathématicien : histoire et légende s'imbriquent tant et si bien qu'il n'est pas toujours aisé de démêler le vrai du faux. A titre d'exemple, on dira de Pythagore qu'il était descendu aux enfers, qu'il avait une cuisse en or, savait apprivoiser les ours ou encore qu'il avait le don d'ubiquité (il pouvait être à plusieurs endroits en même temps). Si ces exemples relèvent clairement du mythe, nous verrons qu'il n'est pas toujours aussi simple de se faire une idée.

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/

Figure 3.1. – Buste de Pythagore

Pythagore serait né aux alentours de -570 à Samos, une île grecque au large de l'actuelle Turquie (ce que l'on appelait alors la Grèce orientale). Sa propre naissance est déjà entourée d'un certain mysticisme puisqu'elle aurait été prophétisée par la Pythie de Delphes elle-même. Le nom de Pythagore signifie ainsi " *celui qui a été annoncé par la Pythie* ". Le jeune Pythagore de Samos se fait remarquer dès ses 18 ans pour ses dons en ... boxe ! Oui je vous avais prévenu, Pythagore est un personnage un peu particulier. C'est donc grâce à ses poings que Pythagore remporte toutes les épreuves de pugilat des jeux olympiques.

La suite est plutôt rocambolesque et parfois fantasmée. Il commence sa formation de philosophe à Milet, plus exactement à l'école milésienne, c'est-à-dire l'école de penseurs fondée par le fameux Thalès quelques années plus tôt. Il quitte ensuite la Grèce pour poursuivre sa formation en Phénicie (côte des actuelles Syrie et Liban) puis en Égypte où il demeure une vingtaine d'année et apprend la géométrie et l'astronomie.

C'est alors que le puissant roi des perses, Cambyse II, décide d'envahir la Phénicie, Chypre et l'Égypte en -525. Son empire s'étendra ainsi de la Cyrénaïque (en Libye actuelle) et de la Turquie à l'Ouest jusqu'au Pakistan et à l'Afghanistan à l'est. Pris dans cette guerre, Pythagore est réduit en esclavage et déporté en Chaldée, à Babylone où il demeurera 12 années supplémentaires, apprenant de divers sages babyloniens, perses ou assyriens. Enfin, un dernier voyage le mènera en Inde avant de revenir en terres grecques. Cet épisode de la déportation à Babylone est très certainement légendaire et sa rencontre avec le prophète Zarathoustra est complètement anachronique. Et je ne vous parle même pas de son excursion en Inde.

Après quelques excursions en Crète, en Thrace et dans d'autres contrées grecques, Pythagore s'en retourne dans sa chère île de Samos où il décide d'enseigner (à environ 40 ans, il était temps d'arrêter les voyages Erasmus et de chercher un travail sérieux). Malheureusement, l'accueil qu'il y reçoit n'est pas franchement chaleureux et il décide de quitter définitivement Samos (d'autres récits expliquent qu'il aurait été banni par le tyran Polycrate qui régnait alors sur l'île). C'est en Grande Grèce, l'actuelle Italie du Sud, qu'il trouve refuge et plus précisément dans la ville de Crotone où il fondera une école. La fraternité pythagoricienne joua un rôle scientifique, philosophique, religieux et politique de premier ordre dans la région tant et si bien que la population finit par se révolter et incendier l'école. C'est dans ces heurts que Pythagore trouva la mort, à Métaponte vers -475.

FIGURE 3.2. – Les voyages avérés ou supposés de Pythagore de Samos

3.2. L'école pythagoricienne, une secte plus qu'une école

Il existe d'ailleurs une anecdote concernant la mort de Pythagore : tentant d'échapper à ses poursuivants, Pythagore se serait retrouvé face à un champ de fèves. Or les préceptes qu'il avait édictés bannissaient les fèves de l'alimentation. Pythagore aurait ainsi préféré être rattrapé que de traverser ce champ. Car l'école pythagoricienne doit plutôt être vue comme une confrérie ou une secte que comme une université.

En créant son école, Pythagore a en fait créé un courant philosophico-religieux appelé aujourd'hui Pythagorisme. Pour les pythagoriciens, " *Tout est nombre* ". Autrement dit, l'univers tout entier peut s'expliquer à l'aide des nombres entiers et des fractions, c'est à dire à l'aide de l'arithmétique. Le nombre n'est rien de moins que l'expression de la volonté divine. La musique n'est qu'une histoire de fractions (nous en parlerons plus longuement après) ! L'astronomie n'est qu'une histoire de cercles et de sphères, or formes et figures géométriques sont synonymes de nombres pour les pythagoriciens. Ainsi, un segment a une longueur ! Ce n'est donc qu'un nombre. un rectangle de longueur 5 et de largeur 3 est associé à la fraction $\frac{5}{3}$. D'ailleurs cette pratique perdure : pensez aux écrans 16 :9 ! Ce ne sont jamais que des écrans dont la longueur vaut $\frac{16}{9}$ de la largeur, c'est à dire que si la longueur est de 1m60 alors la largeur est de 90 cm. Et le cercle me direz-vous ? Le nombre π n'est pas une fraction ! Eh bien à l'époque si. On considère encore que le nombre π est une fraction et l'on utilise généralement des rapports comme 256/81 ou 22/7 qui ont une valeur relativement proche de la célèbre constante (dont on sait aujourd'hui qu'elle n'est pas fractionnaire). Inversement, les nombres sont géométriques pour les Pythagoriciens. Ils classifient ainsi les nombres en plusieurs catégories : les nombres carrés, triangulaires, pentagonaux ... Nous en parlerons plus en détail après.

A cette croyance absolue dans la toute puissance du nombre, le Pythagorisme ajoute un mode de vie quasi monacal. Il n'est pas question de moine et de père supérieur, mais de postulants, néophytes, acousmaticiens, mathématiciens et enfin au sommet de philosophe, " *celui qui aime savoir* ", Pythagore himself . En devenant acousmaticiens, les néophytes font vœu de silence. Pendant cinq ans, ces derniers reçoivent un enseignement oral qu'il leur est interdit de divulguer en dehors de l'école. Pythagore leur dispense son enseignement, caché derrière un rideau. Ce n'est qu'en devenant mathématicien que les disciples peuvent passer de l'autre côté du rideau et voir le maître. Les biens de chacun sont également mis en commun. Une différence est à noter toutefois avec le monachisme chrétien : les femmes sont considérées à égalité avec les hommes et plusieurs font parties de la communauté (fait exceptionnel à l'époque).

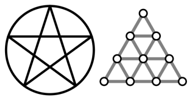


Figure 3.3. – Pentagramme et Tétraktys, symboles pythagoriciens

A la croyance en la toute puissance du nombre et à la vie en communauté s'ajoute un autre élément qui fait du pythagorisme plus qu'une simple école : un corpus de règles morales et de tabous. Nous avons déjà évoquer l'interdiction de manger des fèves mais d'autres interdits alimentaires règnent dans la confrérie : les œufs, le cœur, la cervelle ... sont également prohibés, le végétarisme est quasiment la règle. Les disciples obéissaient à tout un ensemble de préceptes qu'ils se devaient de connaître par cœur. Ces préceptes, appelés **vers d'or**, seront plus tard consignés par écrits et très probablement complétés. En voici quelques-uns :

— "*Honore en premier lieu les Dieux Immortels dans l'ordre qui leur fut assigné par la Loi*",
— "*Honore aussi et ton père et ta mère et tes proches parents*",
— "*Fais ton ami de celui qui excelle en vertu*",
— "*N'entreprends jamais ce que tu ne connais pas ; mais apprends tout ce qu'il faut que tu saches*",
— "*Accoutume-toi à dominer (...) la gourmandise d'abord, le sommeil, la luxure et l'emportement*",
— "*Ne permets pas que le doux sommeil se glisse sous tes yeux, avant d'avoir examiné chacune des actions de ta journée. En quoi ai-je fauté ? Qu'ai-je fait ? Qu'ai-je omis de ce qu'il me fallait faire ?*".

Après tant d'années à bourlinguer à travers le monde, le vieux Pythagore ne s'était pas aménagé une place au soleil. Bien au contraire, il préconisait une vie ascétique dans une communauté vouée à la compréhension du monde et au respect d'autrui. Enfin, il ne faut pas s'imaginer cette fraternité comme un groupe de scientifiques hippies : comprendre l'univers signifie ici comprendre la volonté divine qui s'exprime à travers le Nombre. L'arithmétique est donc vue comme une théologie et un chemin vers la perfection. Pythagore croit également en la réincarnation. Les interdits alimentaires sont en fait la conséquence de cette croyance très forte en la transmigration de l'âme, aussi appelée **métempsycose**. La légende veut que Pythagore aurait eu souvenir de ses vies antérieures.

C'est une quasi-religion qui apparaît ainsi et se diffuse dans le sud de l'Italie. Il est d'ailleurs intéressant de constater qu'à la même période (entre les VI$^{\text{ème}}$ et IV$^{\text{ème}}$ siècle avant jésus christ) apparaissent un peu partout dans l'ancien monde, des sages ou prophètes qui donneront naissance à de grands mouvement philosophico-religieux. C'est par exemple le cas de Confucius et Lao Tseu en Chine qui donnent naissance respectivement au confucianisme et au taoïsme, de Bouddha en Inde qui crée le Bouddhisme ou de Zoroastre en Perse qui réforme le mazdéisme pour donner naissance au zoroastrisme. Si le Pythagorisme ne s'est pas imposé comme religion, il est indéniable qu'il a laissé une trace indélébile dans notre vision du monde car, si l'école de Pythagore fut détruite, il n'en demeure pas moins que ses disciples furent disséminés au travers du monde grec et contribuèrent à diffuser la pensée de leur maître. Quand Galilée dit, environ deux millénaires plus tard : " *mesure ce qui est mesurable et rend mesurable ce qui ne l'est pas* ", on croit entendre Pythagore.

3.3. A retenir :

— Pythagore aurait été le premier a proposer une démonstration du théorème portant son nom mais ne laissa aucun écrit.
— Pythagore a su combiner les connaissances mathématiques acquises au **Moyen-Orient** avec l'exigence de démonstration de l'**école de Thalès**.
— L'école pythagoricienne est un mouvement de pensée prônant la toute-puissance du nombre. Cette philosophie a grandement influencé la pensée scientifique ultérieure.

4. Les découvertes des pythagoriciens

?

Mais alors, hormis la démonstration de "son" théorème, Pythagore n'a jamais fait de science ?

Ce n'est pas non plus ce que j'ai dit. Cette communauté quasi-religieuse a également apporté beaucoup aux sciences. Nous allons voir ici quelques exemples (sans volonté d'être exhaustif) mais gardez toujours à l'esprit que la transmission orale et le secret étaient de règle chez les pythagoriciens et que par conséquent, nous ne possédons aucun document original. Les écrits dont nous disposons sont plus tardifs et attribuent très certainement les découvertes de certains pythagoriciens à leur maître.

4.1. Musique

L'une des découvertes les plus marquantes de Pythagore, étonnamment, concerne la Musique. Cela semble aujourd'hui surprenant, mais durant l'Antiquité et le Moyen-Âge, la Musique était considéré comme une matière scientifique. L'enseignement était basé sur les 7 arts libéraux qui se décomposaient ainsi : le *Trivium* qui comprenait la grammaire, la dialectique et la rhétorique (les lettres en quelques sortes) ; le Quadrivium qui comprenait la géométrie, l'arithmétique, l'astronomie et ... la musique (les sciences comme je vous le disais). On commence alors à comprendre que si Pythagore voyait des nombres dans tout l'univers ou dans toutes les figures géométriques, il devait bien en trouver également dans les odes et les chants.

Si la vision pythagoricienne a échoué à comprendre bien des phénomènes, elle a toutefois été très clairvoyante en matière de Musique. La légende raconte que Pythagore fut un jour dérangé par le bruit que causait le forgeron. S'approchant et observant, il se rendit compte que les sons émis par les coup de marteau de l'artisan étaient plus ou moins graves, selon que celui-ci frappait une lame de de métal plus ou moins longue. Plus important que cela encore, Pythagore a compris un phénomène important : une lame de métal deux fois plus longue qu'une autre émet un son certes plus grave, mais correspondant à la même note ! Autrement dit, si une corde de guitare (ou de lyre pour l'époque) émet un Do lorsqu'on la pince, alors une corde identique deux fois plus longue émettra également un Do mais plus grave :

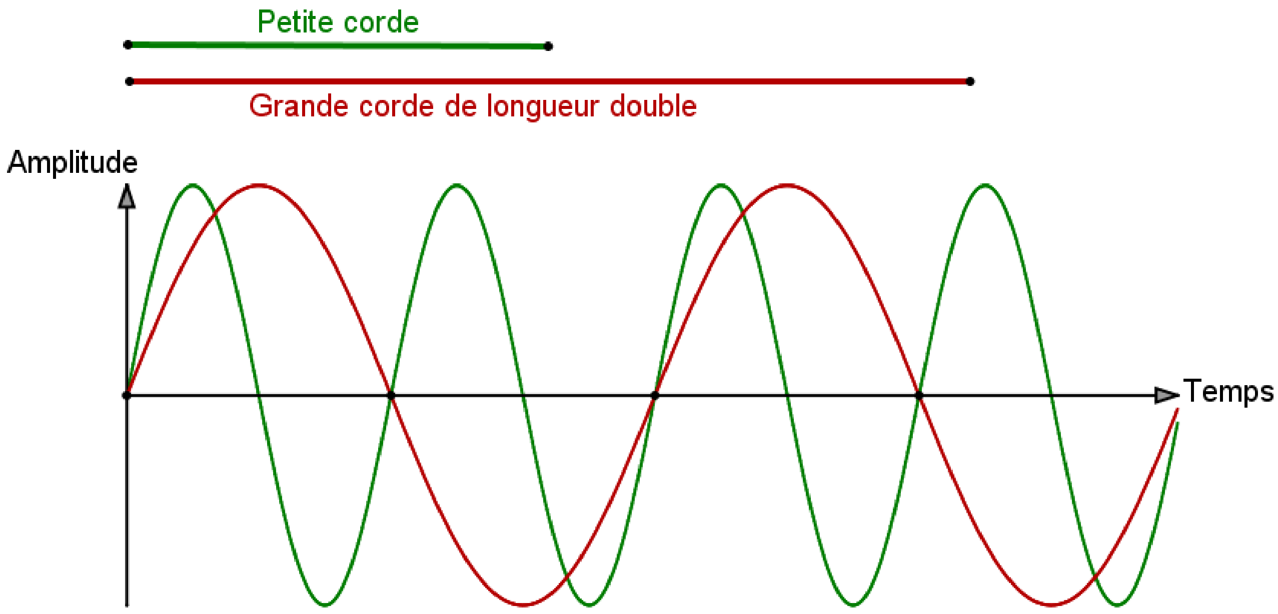


Figure 4.1. – Son émis par deux cordes de longueurs doubles

En termes actuels, nous dirions que plus la corde est longue plus la fréquence de ses vibrations diminue. Cela apparaît sur le schéma ci-dessus : la corde rouge émet une vibration plus longue, de grosses et lourdes vagues alors que la petite corde verte émet des vaguelettes de même amplitude, mais bien plus rapides entraînant un son plus aigu. Ces vaguelettes (appelées **sinusoïdes**) se coupent de manière régulière ce qui implique que la note émise est la même.

?

Mais alors comment faire une autre note qu'un Do ?

C'est là que le génie de Pythagore a frappé. Il a compris qu'il ne fallait pas prendre n'importe quelle longueur intermédiaire. Supposons que l'on dispose d'une corde émettant un joli Do. Diviser sa longueur par 2 émettrait un Do plus aigu, ce n'est pas ce que nous voulons. Alors en bon aficionado des nombres, Pythagore a décidé de prendre les deux tiers de la corde ! Et, ô miracle, le son était également très joli ! Il obtint ainsi un Sol ! Et avec les trois quarts de la corde ? Il obtenait un joli Fa. Les notes de musique étaient donc liées à des rapports de longueurs fractionnaires. Voilà qui n'était pas pour déplaire aux pythagoriciens.

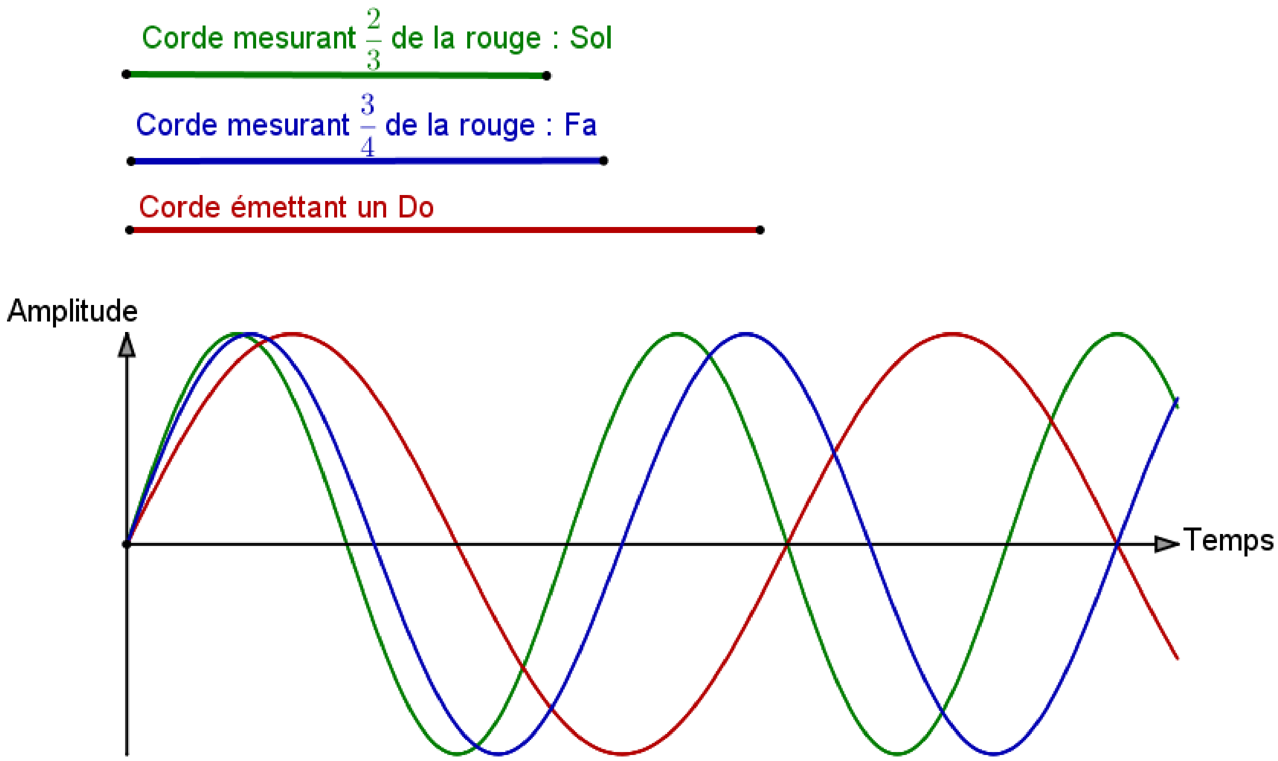


Figure 4.2. – Vibrations d'une corde selon le rapport de longueur choisi

On observe sur ce second schéma que les sinusoïdes ne se coupent plus aussi régulièrement que la fois précédente : les notes sont biens distinctes.

4.2. Arithmétique

4.2.1. Nombres géométriques

Les pythagoriciens, nous l'avons vu, voyaient des nombres partout et les entouraient de toute une mystique. Et par nombre, il faut bien comprendre "nombre entier ou fraction". Il est donc logique que leur sujet d'étude favori ait été l'arithmétique, la science des nombres entiers et rationnels, quoiqu'ils l'aient souvent confondue avec l'arithmologie, sorte d'astrologie des nombres. Je vous ai déjà expliqué qu'ils voyaient les figures comme des nombres et les nombres comme des figures. Leur premier "jeu" à donc consister à classer les nombres selon différents catégories géométriques. Prenons un exemple simple : les nombres carrés. Un nombre x est dit carré si avec x pièces de monnaie, on peut dessiner un carré plein. Par exemple, 25 est un nombre carré puisqu'on peut réaliser 5 lignes de 5 pièces, formant ainsi un carré. Mais un petit dessin vaut mieux qu'un long discours :

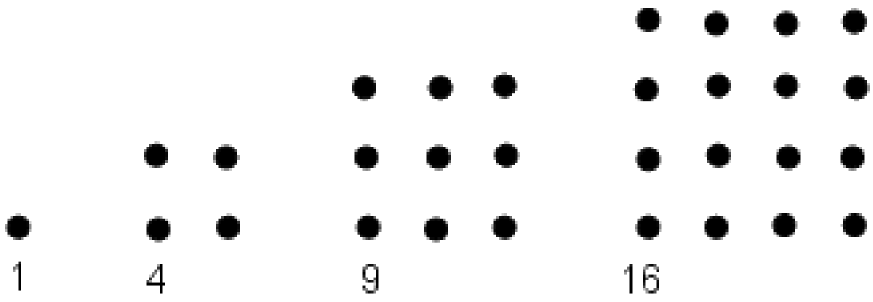


FIGURE 4.3. – Les quatre premiers nombres carrés

Ainsi, 1, 4, 9, 16, 25, 36 ... sont des nombres carrés. On retrouve de façon claire les résultats de 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2 ... Mais on peut également remarquer qu'il suffit d'ajouter 3, 5, 7, 9, 11 ... c'est à dire un nombre impair, pour passer de l'un à l'autre. Nous écririons aujourd'hui $(n+1)^2 = n^2 + (2n+1)$. De la même façon, les Pythagoriciens créent la catégorie des nombres triangulaires : 1, 3, 6, 10, 15, 21 ...

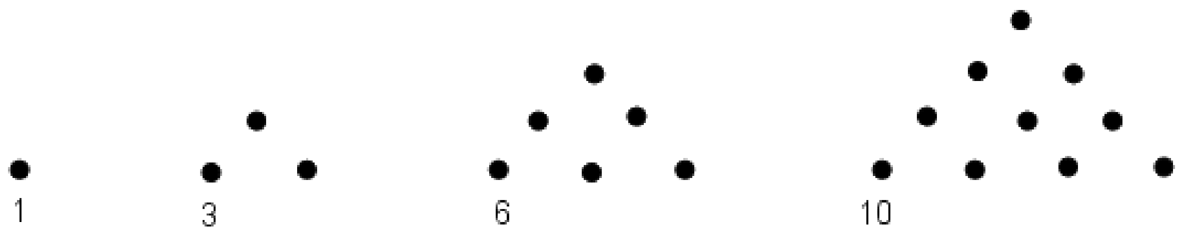


FIGURE 4.4. – Les quatre premiers nombres triangulaires

Cela ne correspond plus à des puissances mais à des nombres de la forme $\frac{n\times(n+1)}{2}$. On remarque également qu'il suffit d'ajouter 2, 3, 4, 5, 6, 7 ... pour passer d'un nombre triangulaire au suivant. On obtient ainsi que $1+2+3+4+...+n = \frac{n\times(n+1)}{2}$.

Vous aurez peut-être reconnu dans la quatrième figure des nombres triangulaires, la fameuse Tétraktys que je vous présentais plus haut ? Ce nombre triangulaire était un symbole important sur lequel les Pythagoriciens prêtaient serment. Pourquoi était-il si important ? Car en additionnant le nombre de pièce de chaque étage du triangle on obtient 1+2+3+4=10, la décade, nombre symbolisant Dieu pour les pythagoriciens ! Cette classification peut être prolongée autant que voulu : nombres pentagonaux, hexagonaux, heptagonaux, octogonaux ...

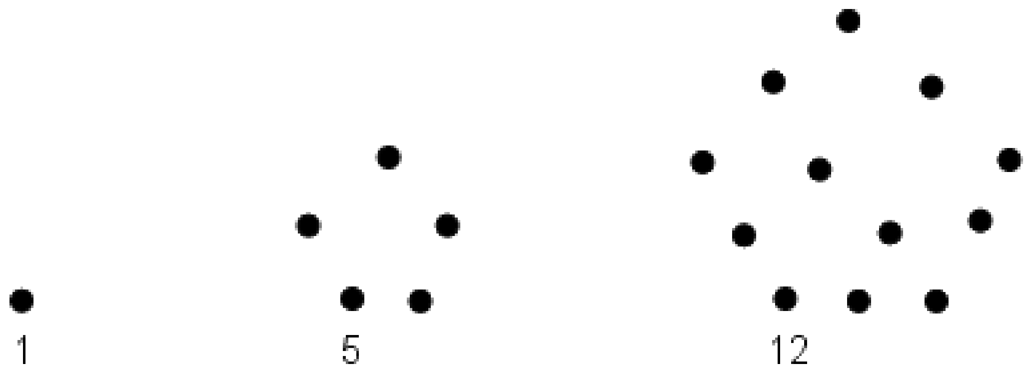


FIGURE 4.5. – Les trois premiers nombres pentagonaux

4.2.2. Nombres parfaits et amicaux

On doit également aux pythagoriciens l'étude des nombres parfaits ou amicaux ? Un nombre parfait est un nombre qui est égal à la somme de ses diviseurs propres (ses diviseurs sauf lui-même). Par exemple, le nombre 8 a comme diviseurs propres 1, 2 et 4. La somme donne 1+2+4=7. Donc 8 n'est pas un nombre parfait (mais on le dit tout de même presque parfait). En revanche, 6 n'a comme diviseurs propres que 1, 2 et 3 et 1+2+3=6. C'est donc un nombre parfait. Vous voulez d'autres nombres parfaits ? Cherchez-en par vous même. On n'en connaît que 48. Après 6, il n'y en a qu'un seul avant 100, puis un seul entre 100 et 1000, ... Bon courage.

Les nombres amicaux reprennent ce principe mais en fonctionnant par paire. Chaque nombre est égal à la somme des diviseurs propres de l'autre. Par exemple : 220 et 284. Les diviseurs propres de 220 sont 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 et 110 ce qui donne une somme de 284. Les diviseurs propres de 284 sont 1, 2, 4, 71 et 142 ce qui donne une somme de 220. A priori, les pythagoriciens ne connaissaient que ces 2 nombres amicaux, le couple suivant étant 1184 et 1210.

4.3. Géométrie

Nous passerons rapidement les découvertes géométriques de Pythagore. Nous avons déjà parlé de la démonstration du théorème portant son nom, mais on lui doit également la démonstration de la toute aussi célèbre propriété " *La somme des angles d'un triangle vaut 180°* ".

Nous allons plutôt nous intéresser ici à une découverte majeure d'un élève de Pythagore : l'irrationnalité de $\sqrt{2}$. Cet élève est Hippase de Métaponte et l'idée lui vint un jour d'employer le théorème de son maître dans un carré afin de déterminer la longueur de la diagonale.

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/

FIGURE 4.6. – Gravure représentant Hippase de Métaponte

Jusque là rien de bien étonnant. Nous avons déjà fait ce travail par nous même et avons montré que pour tout carré de côté a, la diagonale mesurait $a \times \sqrt{2}$. D'ailleurs, ce résultat était déjà connu des Babyloniens, ainsi qu'en atteste une célèbre tablette d'argile répondant au doux nom de *YBC 7289* (pour *Yale Babylonian Collection*, Yale étant une célèbre université américaine) :

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/

FIGURE 4.7. – Tablette YBC 7289

Sur cette tablette (écrite dans un système sexagésimal, c'est à dire comportant 60 chiffres), il faut comprendre qu'un carré de côté 30 a une diagonale de longueur 42 ;25 ;35 (je ne fais pas la conversion dans notre système de numération) et que pour cela il suffit de multiplier par 1 ;24 ;51 ;10. Le nombre 1 ;24 ;51 ;10 est une approximation de $\sqrt{2}$ exacte à 1 millionième près ! Une précision incroyable pour l'époque. Mais revenons à notre cher Hippase de Métaponte. Partant d'un problème déjà résolu depuis des millénaires, Hippase se demanda s'il ne pouvait trouver la valeur fractionnaire de $\sqrt{2}$. Eh oui ! Vous savez bien que " *Tout est nombre* " pour Pythagore et ses disciples, toute longueur peut s'écrire comme un nombre entier ou fractionnaire (on disait alors que toute longueur était **commensurable**).

Voici, en langage moderne, sa réflexion. Supposons que l'on connaisse déjà deux nombres m et n tels que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Supposons également que cette fraction soit irréductible. On peut alors en déduire que :

$$2 = \frac{m^2}{n^2} 2 \times n^2 = m^2$$

Il devient alors clair que le nombre *m* est un nombre pair. Nous pouvons donc l'écrire sous la forme $m = 2 \times p$. Remplaçons désormais *m* par cette nouvelle écriture dans la formule ci-dessus :

2 \times n^{2 = (2 \times p)}2 \ 2 \times n^{2 = 2}2 \times p^{2 \ 2 \times n}2 = 4 \times p^{2 \ n}2 = 2 \times p^2$$

La dernière ligne nous indique donc que n est également un nombre pair. Oui mais nous avions supposé que la fraction $\frac{m}{n}$ était irréductible, or nous venons de dire que m et n sont pairs ! La fraction n'est donc pas irréductible : nous aboutissons à une **absurdité**. Ce raisonnement par l'absurde venait de prouver de façon éclatante que $\sqrt{2}$ n'était pas une fraction ! Nous dirions aujourd'hui que $\sqrt{2}$ est un nombre **irrationnel**, on disait alors **incommensurable**.

Quelle fut la réaction de la fraternité ? Le dénis ! Cette découverte devint un tabou qu'il ne fallait révéler à personne. L'édifice de Pythagore semblait s'écrouler. Mais l'histoire ne s'arrête pas là : que faire du pauvre et Hippase ? Sur ce point, les récits divergent. Certains racontent qu'il aurait été banni, qu'il se serait suicidé ou que ses amis lui aurait construit un tombeau de son vivant (de quoi égayer les soirées). Mais ma version préférée est celle-ci : un jour, des membres de la confrérie proposèrent à Hippase de faire une petite virée en mer, ce que Hippase accepta. Une fois loin des côtés, ses "amis" se jetèrent sur lui, le ligotèrent et le jetèrent à l'eau. Quand Pythagore inaugure les méthodes de la mafia sicilienne.

4.4. Astronomie

En Astronomie, les pythagoriciens vont apporter des idées neuves, révolutionnaires quoique fausses. L'univers pouvant et devant s'expliquer par les nombres et les figures géométriques, ils supposaient donc que la Terre, la Lune ou le Soleil étaient des sphères (la figure parfaite) et que leurs mouvements étaient parfaitement circulaires. Il sont donc les premiers à affirmer la sphéricité de la Terre et affirment également que la Terre tourne sur elle-même. Ils comprennent également que la Lune ne fait que refléter la lumière du Soleil.

Les pythagoriciens vont même plus loin en rejetant le système Géocentrique qui veut que Lune, Soleil, planètes et étoiles tournent autour de la Terre. Pour eux, c'est la Terre elle-même qui tourne autour d'un feu central. Mais attention ! Il ne s'agit pas d'un système Héliocentrique où le Soleil est au centre de toutes les rotations. Non, le soleil tourne lui aussi autour de ce feu central dont il réfléchit la lumière vers la Terre. Mais comme la Terre tourne sur elle-même, le feu central reste à jamais caché aux humains. Les pythagoriciens supposent également l'existence d'une anti-Terre, tournant elle aussi autour du feu central, mais diamétralement opposée à la Terre, donc inaccessible.

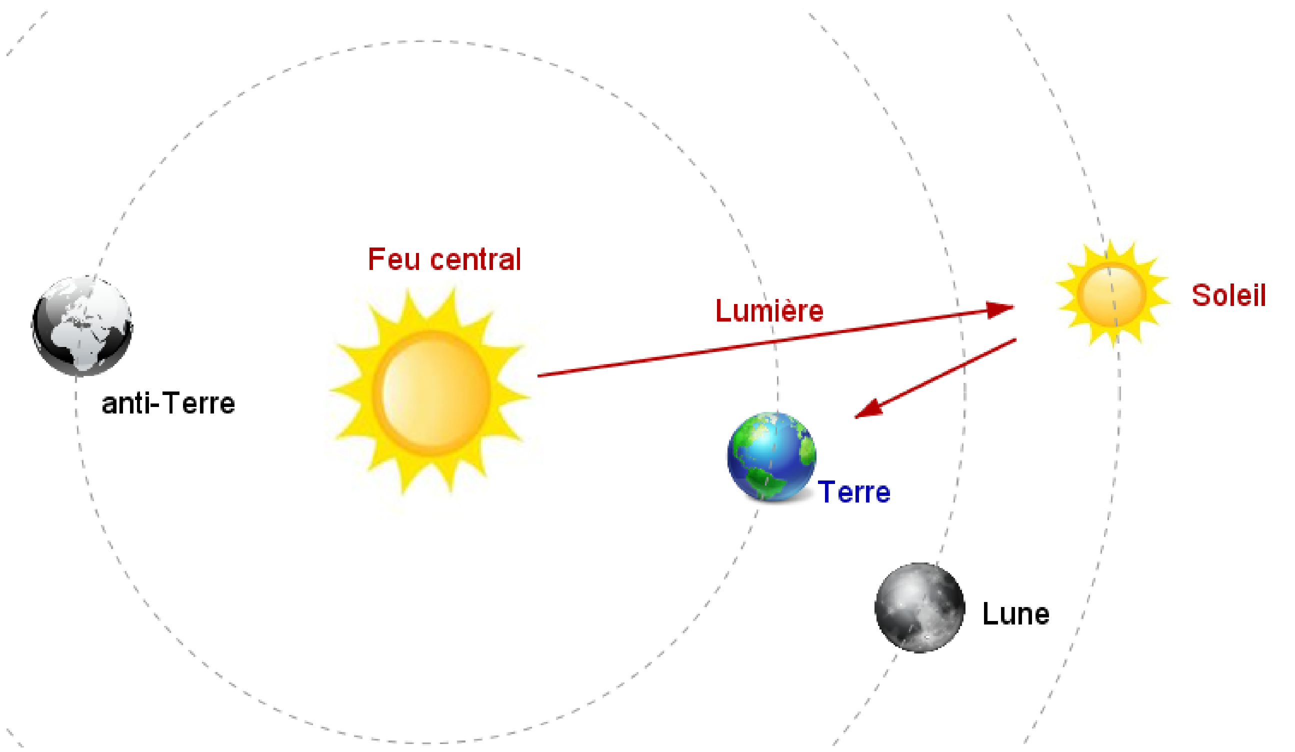


FIGURE 4.8. – Vue simplifiée du système pyrocentrique

Si ce système, dit **pyrocentrique**, fait aujourd'hui sourire il n'en fut pas moins important de nombreux siècles plus tard. Car c'est lui qui inspira à Copernic l'idée du système héliocentrique. L'idée pythagoricienne de l'univers imposait de changer de paradigme : il fallait abandonner une Terre plate pour une Terre sphérique, abandonner sa place centrale dans l'univers pour une place quelconque autour d'un autre astre. Ce système fantaisiste n'en fut donc pas moins fondamental.

4.5. A retenir :

— Pythagore a découvert le lien entre fractions et notes de musique
— Les pythagoriciens étaient surtout des aficionados de l'arithmétique plus que de la géométrie
— La découverte que $\sqrt{2}$ n'est pas une fraction fut un traumatisme pour les premiers pythagoriciens
— Les pythagoriciens sont les premiers à imaginer que la Terre est sphérique et qu'elle tourne à la fois sur elle-même et autour d'un foyer.

La lecture de ce tutoriel est désormais terminée, mais je vous invite à y revenir régulièrement car il s'enrichira certainement encore de conseils, de démonstrations, d'exercices ou d'éléments historiques. N'hésitez pas à me poser vos questions ou à me faire part de vos demandes et commentaires en vue d'une prochaine mise à jour.