Holosmos

Géométrie des équations du second degré

12 août 2019

Table des matières

Les équations du second degré, ce sont des équations de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$). C'est un incontournable des études secondaires. L'idée de ce tutoriel n'est pas de vous faire découvrir le sujet, mais plutôt de donner une interprétation géométrique différente de ce qui se fait habituellement.

La première partie de ce tutoriel permet d'introduire naturellement des équations du second degré, qui exprimeront l'intersection d'un cercle avec une droite. On fera discuter géométrie et algèbre pour établir les équations qui nous intéressent, et puis on les résoudra.

La seconde partie reviendra au cas général des équations du second degré. Le but sera de les résoudre en toute généralité mais aussi de donner une interprétation correspondant au cas géométrique de la première partie.

Les pré-requis de ce tutoriel sont très faibles.

1. Géométrie du cercle

Dans cette première partie, on va commencer par introduire un problème géométrique : comment décrire l'intersection d'une droite avec un cercle ? Pour cela nous allons procéder à l'algébrisation du problème, c'est-à-dire sa mise en équation, et nous verrons que la résolution de l'équation obtenue nous donne la réponse au problème géométrique posé.

1.1. Introduction : un cercle et une droite

Dessinez sur une feuille un cercle et une droite. La disposition des deux vous est totalement libre. Cependant, quoi que vous fassiez vous arriverez dans l'une des trois situations suivantes :

— ou bien la droite n'intersecte pas le cercle ;
— ou bien la droite intersecte le cercle en un point ;
— ou bien la droite intersecte le cercle en deux points.

On peut illustrer ces trois cas de figures par les dessins suivants.

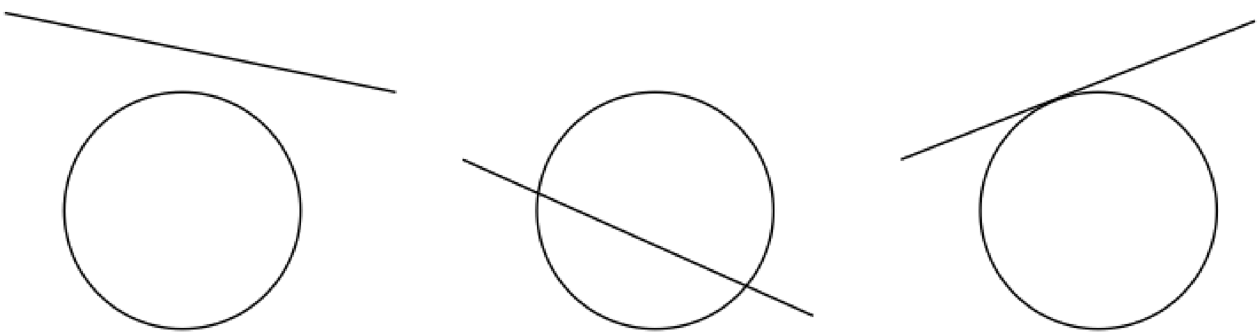

FIGURE 1.1. – Les trois dispositions possibles.

Plusieurs questions apparaissent naturellement :

— Pourquoi ne peut-on pas obtenir plus de deux points d'intersection ? (Par exemple trois points ?)
— Peut-on prédire la position des points d'intersection étant données les équations du cercle et de la droite ?

En fait nous allons répondre à la première question en répondant à la seconde. Mais cette dernière est encore trop délicate à étudier, alors nous allons faire une manipulation géométrique pour pouvoir y répondre pleinement.

L'idée, c'est d'utiliser le fait qu'un cercle est invariant par rotations. Cela signifie que l'on peut faire tourner notre figure géométrique de sorte à ce que la droite soit horizontale. Cela ne change rien à la géométrie du problème (on a simplement tourné la feuille !).

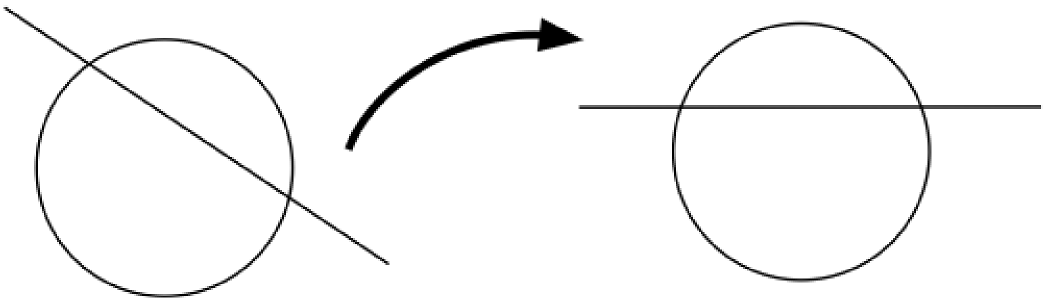

Figure 1.2. – Rotation de la figure.

Ainsi, on se ramène à un problème plus simple qui est le suivant. Étant donnés un cercle et une droite *horizontale*, comment calculer les points d'intersection ?

Une fois ce problème résolu, pour revenir au cas général où la droite n'est pas nécessairement horizontale, on pourrait appliquer aux solutions la rotation inverse de celle utilisée pour se ramener au cas de la droite horizontale. Mais cette manipulation n'est pas tout à fait évidente et ne sera pas nécessaire pour traiter notre sujet : les équations du second degré. Ce retour au cas général est donc laissé en question ouverte pour ceux intéressés par la géométrie du cercle.

1.2. Équation d'un cercle et résolution

1.2.1. Introduction

Dans ce qui suit, nous allons établir les équations d'un cercle et d'une droite horizontale. Une fois fait nous pourrons résoudre le problème devenu alors algébrique.

On commence par choisir un repère orthonormée, de sorte que si on parle de x alors on désigne une quantité réelle sur l'axe des abscisses, et que si on parle de y alors on désigne une quantité réelle sur l'axe des ordonnées. De sorte que l'on peut parler du point (x, y).

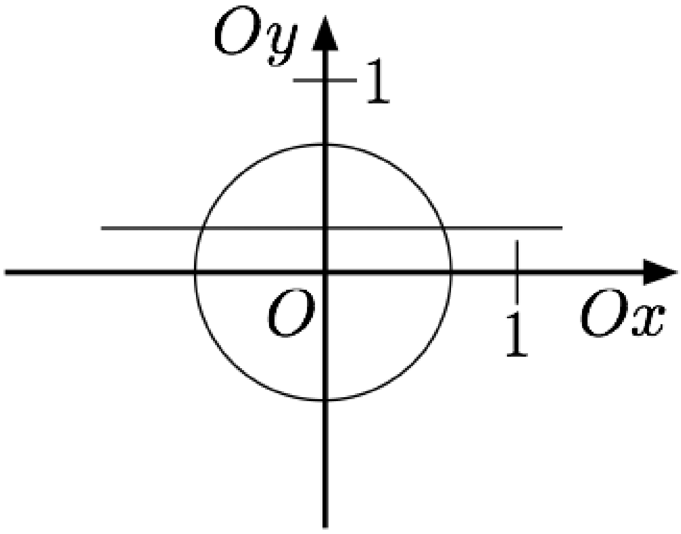

FIGURE 1.3. – Repère orthonormé.

1.2.2. Équation d'un cercle

Qu'est-ce qu'un cercle ? Un cercle, c'est l'ensemble des points à une même distance, appelée rayon, d'un point du plan, appelé centre. Ainsi, un cercle est donné par deux objets : un rayon et un centre.

Il est usuel de choisir $(0, 0)$ comme centre du cercle. Si ce n'est pas le cas pour votre repère, il faut alors introduire un nouveau repère défini par $x' = x - x_0$ et $y' = y - y_0$ où (x_0, y_0) sont les coordonnées du centre de votre cercle. Cela correspond à une simple translation.

Le rayon, nous allons l'appeler r.

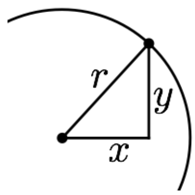

FIGURE 1.4. – Équation d'un cercle par Pythagore.

D'après le théorème de Pythagore, si (x, y) est un point du cercle, alors :

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Nous avons donc un candidat à l'équation d'un cercle. Cela pourrait être $x^2 + y^2 = r^2$ puisque tous les points du cercles vérifient cette équation. Il reste à vérifier que si un point vérifie cette équation, alors il appartient au cercle.

Mais si un point du plan (x, y) vérifie $x^2 + y^2 = r^2$, alors d'après le théorème de Pythagore, cela signifie qu'il est à distance r de l'origine, et donc appartient bien au cercle.

Ainsi, l'équation d'un cercle que l'on utilisera sera :

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Contenu masqué n°1

1.2.3. Équation d'une droite horizontale

Revenons maintenant à notre droite. Puisqu'elle est horizontale, cela signifie qu'un point de cette droite a sa coordonnée y identique à celle des autres points de la droite. En d'autre termes, il existe un même réel k tel que si (x, y) est un point de la droite alors $y = k$.

Ainsi, on a un candidat à l'équation d'une telle droite :

$$y = k.$$

Cette équation définit bien une droite, donc cette équation est celle recherchée.

1.2.4. Résolution du problème

Revenons maintenant à notre problème géométrique, qui peut maintenant être traduit algébriquement. Étant donnés un cercle et une droite donnés par les équations :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ y = k \end{cases}$$

quels sont les points d'intersection ? En d'autres termes, quels sont les points (x, y) vérifiant ce système ?

Tout d'abord, la seconde équation dit que si (x, y) vérifie le système, alors $y = k$. On remplace donc dans la première équation la quantité y par k. On obtient :

$$x^2 + k^2 = r^2$$

maintenant on fait passer le terme k^2 à droite :

$$x^2 = r^2 - k^2.$$

Cette équation donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point (x, y) soit à l'intersection d'un cercle et d'une droite.

Mais rappelez vous que tout comme on avait trois cas possibles sur le nombre de points d'intersection (0,1 ou 2), on doit retrouver algébriquement cette distinction de cas. C'est bien ce qu'il se passe :

— Si $r^2 - k^2 < 0$, alors il n'existe pas de x tel que $x^2 = r^2 - k^2$ (puisque le carré d'un nombre réel est positif). Il n'y alors pas de point d'intersection.
— Si $r^2 - k^2 = 0$, alors seul $x = 0$ vérifie $x^2 = r^2 - k^2$. Ainsi, le seul point d'intersection est $(0, k)$.
— Si $r^2 - k^2 > 0$, alors $\sqrt{r^2 - k^2}$ et $-\sqrt{r^2 - k^2}$ vérifient $x^2 = r^2 - k^2$. Ces deux nombres sont distincts car $r^2 - k^2$ n'est pas nul. Donc les deux points d'intersection sont $(\sqrt{r^2 - k^2}, k)$ et $(-\sqrt{r^2 - k^2}, k)$.

Ainsi, on a complètement résolu notre problème géométrique. On d'ailleurs montré qu'il y avait au plus deux points d'intersection car il y a au plus deux solutions à $x^2 = r^2 - k^2$.

Nous avons maintenant vu comment des équations du second degré peuvent apparaître naturellement dans un problème géométrique. La partie qui suit cherchera à les résoudre dans leur plus grande généralité. Mais l'interprétation géométrique donnée dans cette partie sera réutilisable et permettra toujours de comprendre géométriquement le problème algébrique de la résolution des équations du second degré.

Contenu masqué

Contenu masqué n°1

Il y a une équation à peine plus générale correspondant au cas où le centre du cercle serait (x_0, y_0) et non plus nécessairement $(0, 0)$. Cette équation se trouve de la même manière que celle donnée. Vous pouvez trouver par vous même que c'est $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Retourner au texte.

2. Équations du second degré

Dans cette deuxième partie, nous allons résoudre toutes les équations du second degrés possibles. Pour cela nous allons faire une manipulation qui consiste à mettre une équation du second degré sous sa *forme canonique*.

2.1. Forme canonique et résolution

2.1.1. Équation du second degré

Une équation du second degré, c'est une équation de la forme :

$$ax^2 + bc + c = 0$$

où a, b, c sont trois réels et avec $a \neq 0$. (Si a était nul, alors ce serait l'équation d'une droite.)

Pour résoudre cette équation, il y a une méthode automatique. J'aimerais ici expliquer comment on peut trouver cette méthode en réutilisant le problème géométrique précédent.

2.1.2. Forme canonique

Lors de la partie précédente, nous avons étudié un cas très spécial d'équations du second degré. C'était le cas où :

$$x^2 + (y^2 - r^2) = 0$$

c'est-à-dire où l'on avait $a = 1, b = 0$ et $c = y^2 - r^2$. Nous avions compris cette équation comme étant l'intersection d'un cercle avec une droite horizontale. Notons par ailleurs, que l'on peut réécrire cette équation sous la forme plus simple :

$$x^2 + c = 0.$$

L'idée de la forme canonique, c'est de ramener *toute* équation du second degré sous une telle forme. De sorte, que toute équation du second degré exprime en fait l'intersection d'un cercle avec une droite.

Tout d'abord, remarquons que si a est non nul, alors $1/a$ est non nul, et donc

$$ax^2 + bx + c = 0$$

est une équation équivalente à :

$$\frac{1}{a}(ax^2 + bx + c) = 0$$

qui se développe en :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Maintenant, en se remémorant l'identité remarquable :

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$$

on transforme $x^2 + \frac{b}{a}x$ en :

$$x^2 + \frac{b}{a}x = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

On obtient finalement l'équation suivante :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) = 0.$$

C'est cette équation que l'on appelle *forme canonique*.

En procédant au changement de variable $X = x + \frac{b}{2a}$ on obtient :

$$X^2 + \left(\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) = 0.$$

2.2. Retour à la géométrie

Comme vous pouvez le constater, cette dernière équation correspond à une équation de la forme

$$X^2 + C = 0$$

tout comme dans le cas d'un cercle et d'une droite horizontale.

Pour rappel, lors de la partie précédente, nous avions trouvé comme équation du second degré :

$$x^2 = r^2 - k^2$$

où r était le rayon du cercle et k le réel tel que $y = k$ était la droite considérée.

Maintenant, si on écrit C comme différence de deux carrés : $C = c_1^2 - c_2^2$, alors on peut interpréter géométriquement l'équation $X^2 + C = 0$ comme l'intersection du cercle d'équation $X^2 + y^2 = c_2^2$ avec la droite d'équation $y = c_1^2$.

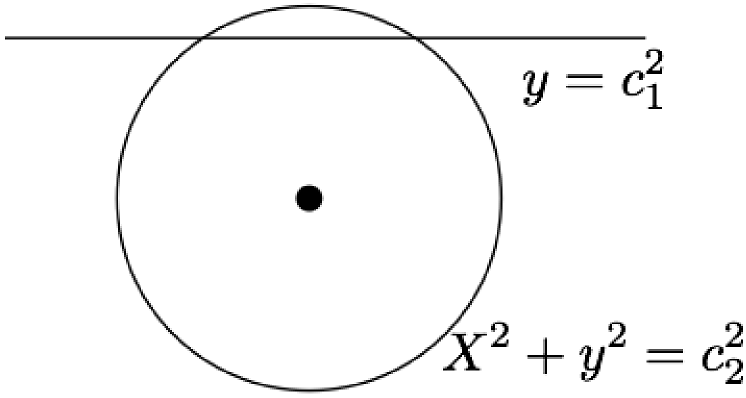

FIGURE 2.1. – Retour au cercle et à la droite.

Ainsi, toutes nos équations du second degré sont bien interprétables comme étant les équations obtenues lors de la traduction algébrique du problème géométrique posé dans la première partie.

2.3. Résolution

Revenons à notre équation sous forme canonique :

$$X^2 + \left(\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) = 0$$

et passons le dernier terme à droite :

$$X^2 = -\left(\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

Il nous reste alors à étudier le signe de cette dernière quantité pour obtenir le nombre de solutions et leurs valeurs (s'il y en a).

Pour étudier le signe de cette quantité, remarquons que comme $4a^2$ est strictement positif (puisque a est non nul), alors :

$$4a^2\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) = b^2 - 4ac$$

a le même signe que $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$. Cette quantité, on l'appelle le *discriminant* (puisqu'il discrimine les équations selon le nombre de solutions) et on le note souvent Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

- Si $\Delta < 0$ alors il n'y a pas de solution.
- Si $\Delta = 0$ alors il y a exactement une solution.
- Si $\Delta > 0$ alors il y a exactement deux solutions.

Supposons que nous sommes dans l'un des deux derniers cas. De sorte que l'on peut considérer $\sqrt{\Delta}$.

Notre équation :

$$X^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{\Delta}{4a^2} = \frac{\sqrt{\Delta}^2}{4a^2}$$

se résout donc directement :

$$X = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } X = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

en sachant que si Δ est nul, alors ces deux quantités sont en fait égales (puisque $\sqrt{0} = 0$). Maintenant en se rappelant de la définition de X : $X = x + \frac{b}{2a}$, on obtient :

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

On a donc résolu toute équation du second degré par une méthode générale (celle du discriminant). Et on a pu interpréter cette méthode par un problème géométrique.

Quelques conseils de lecture :

- le tutoriel de Micmaths sur les équations qui aborde ce sujet avec la vision classique ;
- le tutoriel de Looping sur les nombres , notamment complexes, pour aller vers une généralisation du cas réel.