Gawaboumga

Somme téléscopique

8 mars 2022

Table des matières

Introduction

En cherchant à calculer la complexité d'un événement sur un graphe, je suis tombé sur la résolution des équations suivantes :

$$\frac{1}{1*3}+\frac{1}{3*5}+\frac{1}{5*7}=?$$

ou

$$\frac{1}{3*5}+\frac{1}{5*7}+\frac{1}{7*9}+...=?$$

Étonnamment, la solution générale de ce types d'équations est particulièrement simple. Dans le cas fini, de la somme, il suffit de prendre le nombre de termes et de le diviser par le produit du premier et du dernier nombre au dénominateur, ici : $\frac{3}{1*7}=\frac{3}{7}$. Dans le cas infini, de la série, la réponse consiste à diviser 1 par le premier nombre au dénominateur multiplié par la différence entre deux nombres du dénominateur d'un des termes : $\frac{1}{3*2}=\frac{1}{6}$.

Pourquoi cette astuce fonctionne-t-elle?

Reprenons de manière générale le cas de la somme, nous avons :

$$\frac{1}{a+(a+d)}+\frac{1}{(a+d)+(a+2*d)}+...+\frac{1}{(a+(n-1)*d)+(a+n*d)}$$

De manière générale, chaque terme s'exprime de ainsi :

$$\frac{1}{x*(x+d)}$$

Qu'on peut décomposer en deux termes :

$$\frac{1}{x*(x+d)}=\frac{P}{x}+\frac{Q}{x+d}$$

Maintenant, il suffit de multiplier par $x*(x+d)$ (que l'on sait différent de 0) et puis de distribuer :

$$1 = \frac{P * x * (x+d)}{x} + \frac{Q * x * (x+d)}{x+d}$$

Ensuite, on simplifie et on regroupe :

$$1 = P * (x+d) + Q * x = P * d + x * (P+Q)$$

Maintenant, toute l'astuce consiste à rajouter un terme nul!

$$1 = 1 + x * (0) = P * d + x * (P+Q)$$

On identifie les termes, et on a :

$$P = \frac{1}{d}$$

et

$$P + Q = 0 \Rightarrow Q = -\frac{1}{d}$$

Si l'on revient à l'écriture générale des termes et que l'on remplace par ce que l'on vient de trouver, on se retrouve avec :

$$\frac{P}{x} + \frac{Q}{x+d} = \frac{\frac{1}{d}}{x} - \frac{\frac{1}{d}}{x+d}$$

Enfin, il ne reste plus qu'à réintroduire ce résultat dans le cas général de la somme :

$$\frac{1}{a+(a+d)} + \frac{1}{(a+d)+(a+2*d)} + ... + \frac{1}{(a+(n-1)*d)+(a+n*d)} =$$

$$\frac{\frac{1}{d}}{a} - \frac{\frac{1}{d}}{a+d} + \frac{\frac{1}{d}}{a+d} - \frac{\frac{1}{d}}{a+2*d} + ... + \frac{\frac{1}{d}}{a+(n-1)*d} - \frac{\frac{1}{d}}{a+n*d}$$

On se retrouve dans le cas d'une somme télescopique où le 2e et 3e terme s'annule, puis le 4e et 5e, ... Il ne va rester que deux termes :

$$\frac{\frac{1}{d}}{a} - \frac{\frac{1}{d}}{a+n*d}$$

On se laisse piloter par l'algèbre :

$$\frac{1}{d*a} - \frac{1}{d*(a+n*d)} = \frac{(a+n*d)-a}{d*a*(a+n*d)} = \frac{n*d}{d*a*(a+n*d)}$$

Et on aboutit à :

$$\frac{n}{a*(a+n*d)}$$

qui est la solution "rapide" précédemment mentionnée dans le cas de la somme.

Pour la série, il suffit de faire tendre n vers l'infini :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{a*(a+n*d)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{a^2+a*n*d}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{a*n*d}$$

Et on tombe sur :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a*d}$$

Conclusion

Résultat très peu utile, voire inintéressant, mais qui m'a étonné de par son élégance. Je voulais juste vous faire partager ce moment! Que se passe-t-il maintenant si la différence des termes évolue de manière géométrique ou exponentielle? Les réponses sont malheureusement un peu trop complexes et peu suffisamment élégantes ...