Melcore

De l'imaginaire à la matrice

9 avril 2020

Table des matières

Lorsqu'on fait des mathématiques, on remarque souvent des liens entre 2 domaines de la matière. Dans ce billet nous allons voir un lien *étonnant* entre les nombre complexes et les matrices. Celui-ci est utile pour des langage qui ne gèrent que des matrices, par exemples.

> Prérequis :
> — Connaitre les nombres complexes
> — Connaitre les matrices

1. Rappel sur les nombres complexes

Soit un nombre complexe $z = a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $i^2 = -1$. On dit que a est la partie réelle de z et b la partie imaginaire.

1.0.1. Opérations sur les complexes

Soient $y = c + id \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} y + z &= (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) \\ y \times z &= (a + ib) \times (c + id) = ac + aid + ibc + i^2bd = (ac - bd) + i(ad + bc) \end{aligned}$$

2. Rappel sur les matrices

Une matrice est un objet mathématique plusieurs nombres ordonnés en lignes et colonnes. Nous nous arrêterons dans ce billet aux matrices M_2 possédant 2 lignes et 2 colonnes.

Soient les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$$

2.0.1. Opérations sur les matrices

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$\text{A } \times \text{B} = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} \end{pmatrix}$$

On remarque qu'en général avec les matrices $A \times B \neq B \times A$

3. Transfomer le complexe en matrice

L'astuce présentée ici, est assez simple.

Si on écrit un nombre complexe $a + ib$ tel la matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ on retrouve les bonnes propriétés des complexes.

Ainsi :

$$(a + ib) + (c + id) \Rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c & -(b + d) \\ b + d & a + c \end{pmatrix} \Leftarrow (a + c) + i(b + d)$$

$$\text{(a + ib) } \times \text{(c + id)} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ bc + ad & -bd + ac \end{pmatrix} \Leftarrow \text{(ac-bd) + i(ad +bc)}$$

On remarquera aussi que le déterminant de la matrice vaut le carré du module du complexe.

On a donc vu qu'un nombre complexe pouvait s'écrire comme une matrice *particulère* afin d'utiliser des complexes dans des langages qui ne gèrent que des matrices.