Gavroche

Démontrer la loi de Snell-Descartes

21 mai 2023

Table des matières

Introduction

La seconde loi de Snell-Descartes, qui stipule que $n_1 = n_2$, a de nombreuses applications: calculer l'angle de réflexion, modéliser une fibre optique … Mais savez-vous comment la démontrer? Dans cet article, c'est justement ce que je vous propose en utilisant le principe de Fermat.

Pour suivre cet article, il est nécessaire d'avoir un niveau en mathématiques équivalent à celui du baccalauréat et d'avoir déjà fait un peu d'optique géométrique.

1. Les postulats de l'optique géométrique

1.1. Explication

Pour faire de l'optique géométrique, on suppose plusieurs choses sur la lumière:

— il n'y a pas de phénomène de diffraction.
— les rayons sont indépendants les uns des autres.
— et le principe de Fermat

Le postulat qui nous intéresse ici est celui de Fermat, que l'on appelle aussi **principe de moindre temps**. Il stipule qu'entre deux points A et B, atteints par la lumière, le **chemin optique** suivi le long du trajet est extrémal. Le chemin optique, entre A et B, est défini comme:

$$L(AB) = n(s)\mathrm{d}s$$

Avec ds l'abscisse curviligne et $n(s)$ l'indice de réfraction

On peut interpréter le chemin optique comme le trajet que parcourrait la lumière si le trajet se faisait dans le vide.

Rappel sur l'**indice de réfraction**: Il s'agit du rapport entre la vitesse de la lumière dans le vide et la vitesse de la lumière dans le milieu considéré, et on le note n.
De plus, on va considérer dans cet article que tous les milieux sont homogènes: un **milieu homogène** est un milieu dont les propriétés sont les mêmes en tout point de l'espace. Donc l'indice de réfraction est constant.

Dans le cas des milieux homogènes, le chemin optique devient:

$$L(AB) = n\mathrm{d}s = AB \times n$$

Le principe de Fermat impose que le trajet entre A et B soit minimal, et le moyen le plus court pour relier deux points c'est une droite. On a donc démontré que la lumière se déplace en ligne droite dans un milieu homogène.

Dans cet article, on utilise une version simplifiée du principe de Fermat: le chemin optique suivi le long du trajet est minimal et non extrémal.

1.2. Illustration

Pour illustrer le principe de Fermat, prenons un exemple, supposons que la lumière va du point A au point B, en changeant de milieu. On sait que la lumière va se déplacer en ligne droite, mais on a "plusieurs chemins possibles":

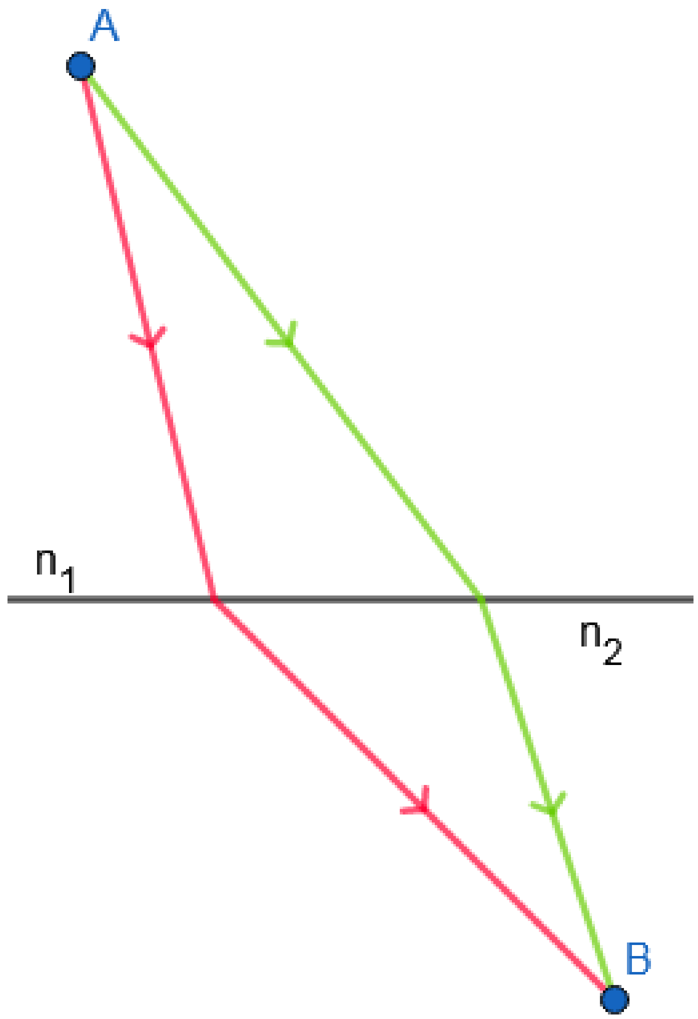

Figure 1.1. – Exemple de chemins possibles

Le principe de Fermat nous dit que le chemin choisi va être celui qui prend le moins de temps.

2. La preuve

2.1. Calcul du temps de parcours

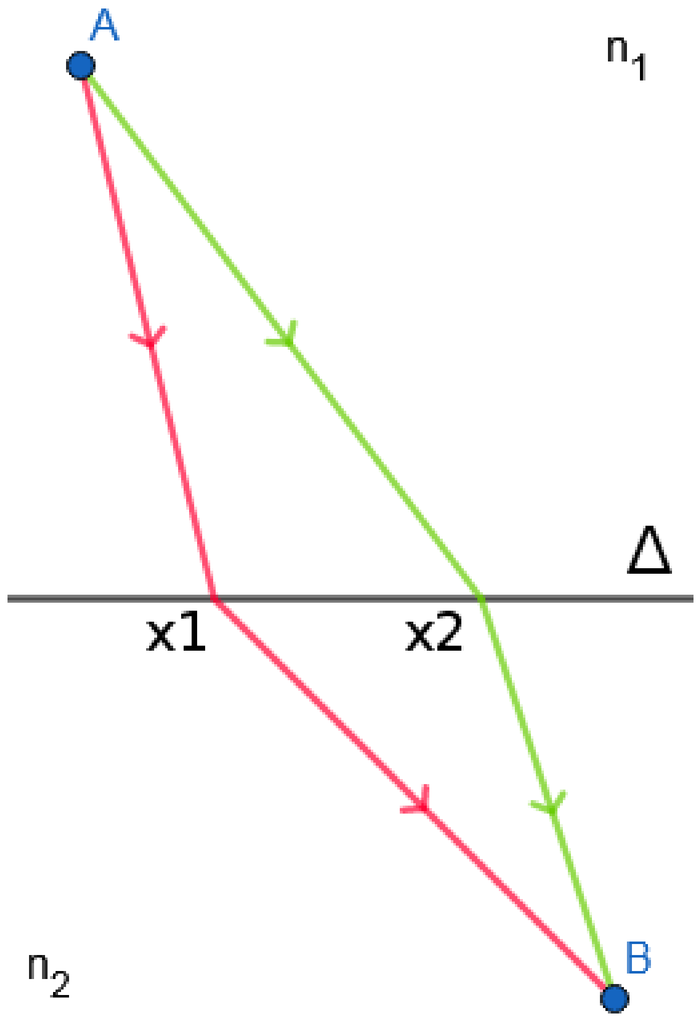

FIGURE 2.2. – Schéma montrant plusieurs parcours possibles

Si on regarde ce schéma, on a deux points A et B fixés qui sont dans deux milieux différents, on considère que la lumière passe par ces deux points, la question que l'on peut se poser alors: en quel point de la droite Δ la lumière va changer de milieu.

On introduit ensuite une base $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$ sur le point A. On note (x_b, y_b) les coordonnées sur point B et (x_o, y_o) celle du point O, dans cette base.

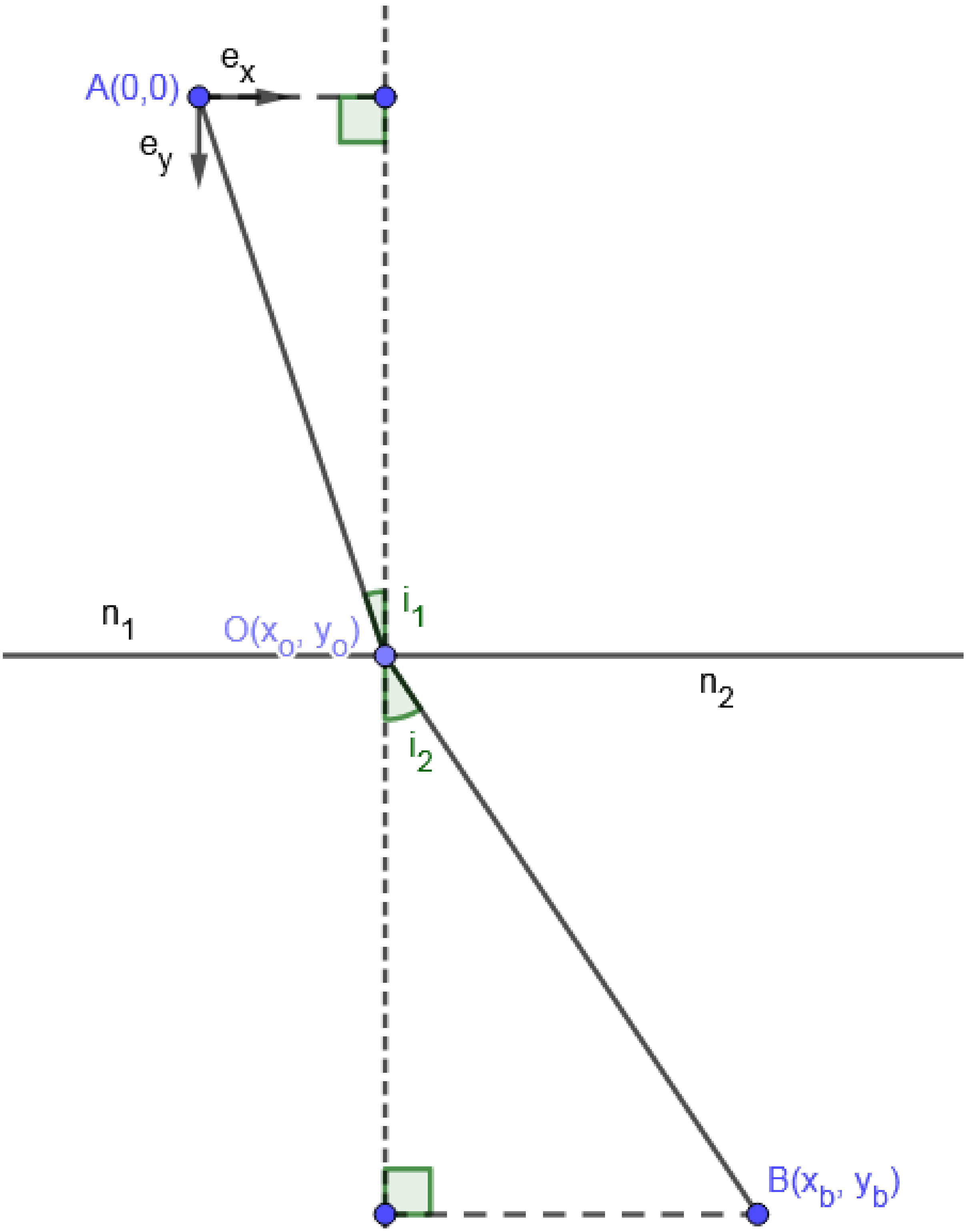

FIGURE 2.3. – Schéma avec les différentes coordonnées

La distance parcourue correspond à $AO + BO$. De plus, on a $AO = \sqrt{x_o^2 + y_o^2}$ et $BO = \sqrt{(x_o - x_b)^2 + (y_o - y_b)^2}$.

Le temps mis par la lumière est donc $t = \frac{AO}{v_{AO}} + \frac{BO}{v_{BO}}$. L'indice de réfraction nous donne que $v_{AO} = \frac{c}{n_1}$ et $v_{BO} = \frac{c}{n_2}$ Donc

$$\boxed{t = \frac{n_1\sqrt{x_o^2+y_o^2}}{c} + \frac{n_2\sqrt{(x_o-x_b)^2+(y_o-y_b)^2}}{c}}$$

On veut que t soit le plus petit possible, et pour trouver le minimum d'une fonction, on calcule la dérivée.

2.2. Calcul des dérivées

Si on regarde l'expression de t, on peut voir qu'elle dépend de plusieurs paramètres: x_o, y_o, x_b et y_b. Déjà, on sait que la position du point A et B sont fixés donc x_b et y_b sont connus. De plus le point O est à l'interface entre les deux milieux, d'où le fait qu'on connaisse sont ordonnée y_o.

Donc t est une fonction de paramètre x_o. On peut alors calculer la dérivée:

$$t'(x_o) = \frac{n_1 \times 2x_o}{c \times 2\sqrt{x_o^2+y_o^2}} + \frac{n_2 \times (2x_o - 2x_b)}{c \times 2\sqrt{(x_o-x_b)^2+(y_o-y_b)^2}}$$

$$t'(x_o) = \frac{n_1 \times x_o}{c \times \sqrt{x_o^2+y_o^2}} + \frac{n_2 \times (x_o - x_b)}{c \times \sqrt{(x_o-x_b)^2+(y_o-y_b)^2}}$$

On calcule ensuite la dérivée seconde:

$$t''(x_o) = \frac{n_1}{c}\frac{\sqrt{x_o^2+y_o^2} - \frac{2x_0^2}{2\sqrt{x_o^2+y_o^2}}}{x_0^2+y_0^2} + \frac{n_2}{c}\frac{\sqrt{(x_o-x_b)^2+(y_o-y_b)^2} - \frac{2(x_o-x_b)^2}{2\sqrt{(x_o-x_b)^2+(y_o-y_b)^2}}}{(x_o-x_b)^2+(y_o-y_b)^2}$$

Après simplification:

$$t''(x_o) = \frac{n_1}{c}\frac{y_o^2}{\sqrt{x_o^2+y_o^2}(x_o^2+y_o^2)} + \frac{n_2}{c}\frac{(y_o-y_b)^2}{\sqrt{(x_o-x_b)^2+(y_o-y_b)^2}((x_o-x_b)^2+(y_o-y_b)^2)}$$

On peut voir que celle-ci est positive.

2.3. Résultat final

Si on reprend le schéma, on a deux triangles rectangles donc:

$$= \frac{x_0}{\sqrt{x_o^2+y_o^2}}$$

et

$$= \frac{x_b - x_o}{\sqrt{(x_o-x_b)^2+(y_o-y_b)^2}}$$

En injectant cela dans la formule de la dérivée:

$$t'(x_o) = n_1 \times c - \frac{n_2 \times c}{}$$

Pour le deuxième sinus, on est passé de $x_o - x_b$ à $-(x_b - x_o)$ afin d'avoir une longueur positive, on se retrouve alors avec un signe moins devant la deuxième fraction.

De plus $t''(x_o)$ est positive donc $t(x_0)$ admet un minimum lorsque $t'(x_o) = 0$, on obtient alors:

$$\frac{0 = n_1 \times c - \frac{n_2 \times c}{}}{}$$

D'o $\boxed{n_1 \times = n_2 \times}$

On a bien démontrer la deuxième loi de Snell-Descartes.

Conclusion

Voilà, c'est la fin de cet article, vous savez désormais comment démontrer la seconde loi de Snell-Descartes, j'espère qu'il vous sera utile.

Pour aller plus loin:

— Le principe de Fermat (Wikipédia)
— Lois de Snell-Descartes (Wikipédia)